

MAURICIO VALENCIA FERREIRA DA LUZ

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA
CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS 3D
UTILIZANDO ELEMENTOS DE ARESTA,
LEVANDO EM CONTA O MOVIMENTO E O
CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO**

FLORIANÓPOLIS

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA
CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS 3D
UTILIZANDO ELEMENTOS DE ARESTA,
LEVANDO EM CONTA O MOVIMENTO E O
CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

MAURICIO VALENCIA FERREIRA DA LUZ

Florianópolis, março de 2003.

“O homem deve sempre procurar exceder seus conhecimentos,
não se preocupando somente com o produto final de sua descoberta,
mas acima de tudo, com a aventura humana que o levou até lá”

Mauricio V. F. da Luz

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Nelson Sadowski, Prof. Dr. João Pedro Assumpção Bastos e Dr. Patrick Dular, pelas motivações, estímulos, atenções e colaborações inestimáveis, tanto no plano profissional como pessoal, as quais sustentaram o desenvolvimento deste trabalho, e pela amizade dispensada.

Aos professores, alunos e ex-alunos do GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos da UFSC) pela convivência agradável ao longo deste período, pela amizade e incentivo que sempre demonstraram.

Aos membros do Département d'Electricité, Electronique et Informatique do Institut Montefiore da Université de Liège, na Bélgica, pela excelente acolhida e amizade no decorrer do doutorado sanduíche.

Ao Prof. Dr. Silvio Ikuyo Nabeta por ter sido o Relator da Tese, fato que me honrou. Sou grato por suas contribuições e pelas horas de leitura e análise relativas a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Nelson Jhoe Batistela pela paciência de ter examinado este trabalho e pelas suas contribuições como membro da Banca Examinadora.

À secretária do GRUCAD, Celly Dulcemar Melo, pela sua disposição em colaborar.

Ao Wilson Silva Costa, secretário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, pelo apoio e colaboração constantes.

À empresa WEG e seus colaboradores, que muito ajudaram na execução deste trabalho.

Ao suporte financeiro do CNPq, ao longo de três anos e seis meses, e da Université de Liège, ao longo de seis meses.

Aos meus queridos pais, Patrício e Alice, que não mediram esforços para a realização de meus sonhos.

A todos aqueles com os quais tenho tido o privilégio de conviver de forma mais intensa no decorrer dos anos em que estive envolvido nesse trabalho, que certamente incorreria em alguma injustiça se fosse nomeá-los todos, mas que cada um deles tem plena ciência do meu reconhecimento e profunda gratidão.

E, acima de tudo, à DEUS por ter me dado paz e tranquilidade para atingir os objetivos os quais almejo.

A todos agradeço, profundamente, e dedico o resultado deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS 3D UTILIZANDO ELEMENTOS DE ARESTA, LEVANDO EM CONTA O MOVIMENTO E O CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO

Mauricio Valencia Ferreira da Luz

Março/2003

Orientador: Nelson Sadowski, Dr.

Co-orientador: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Orientador no Exterior: Patrick Dular, Dr.

Área de concentração: Sistemas de Energia.

Palavras-chaves: método de elementos finitos, análise do movimento, condições de periodicidade ou anti-periodicidade, formulações duais, máquinas elétricas.

Número de páginas: 91.

RESUMO: Este trabalho aborda o desenvolvimento e a implementação de um método de análise de dispositivos eletromagnéticos considerando o circuito de alimentação. A modelagem do dispositivo eletromagnético é realizada usando o método de elementos finitos tridimensional e o equacionamento do circuito é feito em variáveis de espaço de estados. Um acoplamento forte entre os dois sistemas de equações é conseguido utilizando as grandezas comuns a ambos, isto é: as correntes e as tensões nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético. O movimento do rotor é modelado através do método da banda de movimento no qual uma alocação dinâmica das condições de periodicidade ou anti-periodicidade é realizada. A validação das ferramentas desenvolvidas neste trabalho foi obtida utilizando-se três tipos de máquinas a ímãs permanentes com topologias de fluxo radial, axial e transversal.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

DEVELOPMENT OF A SOFTWARE FOR 3D ELECTROMAGNETIC FIELD CALCULATION USING EDGE ELEMENTS, TAKING INTO ACCOUNT THE MOVEMENT AND THE FEEDING CIRCUIT

Mauricio Valencia Ferreira da Luz

March/2003

Advisor: Nelson Sadowski, Dr.

Co-advisor: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Advisor in Belgium: Patrick Dular, Dr.

Area of Concentration: Energy Systems.

Keywords: finite element method, motion analysis, periodic or anti-periodic boundary conditions, dual formulations, electrical machines.

Number of pages: 91.

ABSTRACT: This work deals with the development and implementation of a method to analyze electromagnetic devices fed by external electric circuits. The electromagnetic device is modeled by three-dimensional finite element method and the circuit equations are written in a state space form. A strong coupling of the two equations systems is obtained using the common variables for both systems, i.e., the currents and voltages of the electromagnetic device windings. The rotor movement is modeled by means of the moving band method using a dynamic allocation of periodic or anti-periodic boundary conditions. The validation of the simulation tools developed in this work is performed using three types of permanent magnet machines with radial, axial and transversal flux topologies.

SUMÁRIO

	página
Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Sumário	ix
Lista de símbolos e figuras	xi
 CAPÍTULO 1 – Introdução	 01
1.1 Posicionamento do problema e motivação da pesquisa	01
1.2 Proposta de tese e objetivos	03
1.3 Contribuições originais	05
1.4 Organização do trabalho	06
 CAPÍTULO 2 – Formulações para a resolução das equações do campo eletromagnético	 07
2.1 Introdução	07
2.2 Equações de Maxwell em meios contínuos	07
2.3 Leis de comportamento dos materiais	08
2.4 Condições de contorno	09
2.4.1 Condições homogêneas	09
2.4.2 Condições de transmissão dos campos	10
2.4.3 Grandezas globais impostas do tipo fluxo e do tipo circulação	11
2.5 Expressões integrais: notações	11
2.6 Suposições e definições	13
2.6.1 Região limitada Ω	13
2.6.2 Subconjuntos de Ω	13
2.6.2.1 Conjunto dos indutores Ω_s	14
2.6.2.2 Conjunto dos geradores Ω_g	14
2.7 Formulações estudadas	16
2.7.1 Problema da magnetostática	17
2.7.1.1 Formulação em potencial escalar magnético	17
2.7.1.2 Formulação em potencial vetor magnético	22
2.7.2 Problema da magnetodinâmica	23
2.7.2.1 Formulação conforme em \mathbf{h}	24
2.7.2.2 Formulação conforme em \mathbf{b}	25
2.8 Discretização pelo método de elementos finitos	26
2.8.1 Funções de base ou aproximação nodais	27
2.8.2 Funções de base ou aproximação de aresta	27
2.9 Discretização das formulações	28
2.9.1 Problema da magnetostática	29
2.9.1.1 Formulação em potencial escalar magnético	29
2.9.1.2 Formulação em potencial vetor magnético	30
2.9.2 Problema da magnetodinâmica	31
2.9.2.1 Formulação conforme em \mathbf{b}	32
2.9.2.2 Formulação conforme em \mathbf{h}	34
2.9.2.2.1 Considerando domínio simplesmente conexo	36
2.9.2.2.2 Considerando domínio multiplamente conexo	38
2.10 Pré-cálculo do campo magnético fonte	41
2.11 Considerações finais	42

CAPÍTULO 3 – Acoplamento com circuitos externos e método para levar em conta o movimento	43
3.1 Introdução	43
3.2 Acoplamento entre as equações de campo e a equação de circuito externo	43
3.2.1 Formulação conforme em \mathbf{h}	44
3.2.2 Formulação conforme em \mathbf{b}	45
3.3 Condições de periodicidade	48
3.3.1 Formulação conforme em \mathbf{b}	49
3.3.2 Formulação conforme em \mathbf{h}	49
3.4 Métodos para levar em conta o movimento	50
3.4.1 Os métodos integrais	51
3.4.2 Os métodos da recolagem das malhas	52
3.4.3 O método da banda de movimento	54
3.5 Considerações finais	57
CAPÍTULO 4 – Resultados obtidos	58
4.1 Introdução	58
4.2 Servomotor CA: máquina de fluxo radial	58
4.2.1 Servomotor operando como gerador a vazio	61
4.2.1.1 Passo de rotação igual a $2,5^\circ$	61
4.2.1.2 Passo de rotação igual a $0,5^\circ$	63
4.2.2 Servomotor operando como gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos	66
4.3 Motor de fluxo magnético axial	70
4.4 Motor de fluxo magnético transversal	74
4.5 Considerações finais	78
CAPÍTULO 5 – Conclusão	79
ANEXO A – Elementos Hierárquicos	
A.1 Interesse dos elementos hierárquicos	82
A.2 Definição e propriedades dos elementos hierárquicos	82
A.2.1 Definição	83
A.2.2 Propriedades	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

SIMBOLOGIA

Símbolos Alfanuméricos:

\mathbf{x}	Ponto do espaço
t	Instante de tempo [s]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções escalares de quadrado integrável sobre Ω
$\mathbf{L}^2(\Omega)$	Espaço das funções vetoriais de quadrado integrável sobre Ω
$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$	Espaço do operador <i>div</i>
$\mathbf{H}(\text{grad}, \Omega)$	Espaço do operador <i>grad</i>
$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$	Espaço do operador <i>rot</i>
\mathbf{h}	Campo magnético [A/m]
$\mathbf{h}_{s,i}$	Campo magnético fonte para o indutor i [A/m]
\mathbf{b}	Indução magnética [T]
\mathbf{b}_r	Indução remanente [T]
\mathbf{e}	Campo elétrico [V/m]
\mathbf{d}	Densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica [C/m ²]
\mathbf{j}	Densidade de corrente [A/m ²]
$\mathbf{j}_{s,i}$	Densidade de corrente elétrica para o indutor i [A/m ²]
Q	Carga elétrica total [C]
c	Cavidade em Ω
A	Conjunto das arestas da malha
N	Conjunto dos nós da malha
N_i	Número de espiras do indutor i
V_i	Tensão no indutor i
FEM	Força eletromotriz [V]
R_i	Resistência ôhmica do indutor i [Ω]
S_i	Área superficial do indutor i [m ²]
\mathbf{v}	Velocidade de rotação ou de translação
\mathbf{a}	Potencial vetor magnético [Wb/m]
v	Potencial escalar elétrico [V]
\mathbf{a}'	Função teste vetorial
r	Resíduo (função escalar)

\mathbf{r}	Resíduo (função vetorial)
\mathbf{n}	Campo de vetores unitários normal à superfície
\forall	Para todo
\in	Pertence a
\notin	Não pertence a
\cup	União dos conjuntos
\subset	Está contido em
\supset	Contém

Símbolos Gregos:

Ω	Domínio limitado do espaço Euclidiano tridimensional
Ω_c	Domínio condutor
Ω_i	Domínio contendo ímãs permanentes
Ω_s	Domínio contendo os indutores finos
Ω_g	Domínio contendo os indutores maciços
Ω_c^C	Domínio não condutor
Γ	Fronteira de Ω ($= \partial\Omega$)
Γ_B	Fronteira associada à fronteira de referência
Γ_A	Fronteira de referência
ρ	Densidade de carga elétrica [C/m ³]
Ψ	Fluxo magnético concatenado [Wb]
Φ	Força magnetomotriz [Ae]
η	Função escalar qualquer
ϕ'	Função teste escalar
μ	Permeabilidade magnética [H/m]
μ_o	Permeabilidade magnética do ar [H/m]
ν	Relutividade magnética [m/H]
ε	Permissividade elétrica [F/m]
Σ	Superfície entre dois meios contínuos

Abreviações:

FEM	Força eletromotriz
-----	--------------------

Operadores:

∂_t	Derivada no tempo
c	Complemento
$grad$	Gradiente
rot	Rotacional
div	Divergente
\bullet	Produto escalar
\times	Produto vetorial

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 Domínio estudado: (a) grandezas elétricas e (b) grandezas magnéticas.
- Figura 2.2 Superfície Σ entre dois meios contínuos Ω_1 e Ω_2 .
- Figura 2.3 Domínio Ω e suas respectivas sub-regiões.
- Figura 2.4 Modelo de um indutor com fonte de força eletromotriz em $\Omega_{g,i}$.
- Figura 2.5 Uma região simplesmente conectada (ou conexa).
- Figura 2.6 Uma região que não está simplesmente (ou está multiplamente) conectada (ou conexa).
- Figura 2.7 Domínio de estudo toroidal.
- Figura 2.8 Entidades geométricas: nó e aresta ($i, j \in N$).
- Figura 2.9 Seção transversal e sua camada de transição associada ao indutor.
- Figura 2.10 Domínio de estudo (conexo).
- Figura 2.11 Corte, camada de transição associada e função q_i .
- Figura 3.1 Condições de periodicidade com elementos de aresta.
- Figura 3.2 Utilização de dois referenciais
- Figura 3.3 Utilização de uma superfície de recolagem
- Figura 3.4 Conexão das condições de fronteira com a banda de movimento
- Figura 4.1 Domínio de estudo e malha tridimensional.
- Figura 4.2 Distribuição da indução magnética para um ângulo de rotação de $11,25^\circ$.
- Figura 4.3 Tensões de fase para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **a**.
- Figura 4.4 Tensões de fase para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **h**.
- Figura 4.5 Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio.
- Figura 4.6 Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **a**.
- Figura 4.7 Zoom da tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **a**.
- Figura 4.8 Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **h**.
- Figura 4.9 Zoom da tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação **h**.
- Figura 4.10 Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio com elementos hierárquicos de primeira e segunda ordem polinomial – formulação **a**.
- Figura 4.11 Zoom das tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio com elementos hierárquicos de primeira e segunda ordem polinomial – formulação **a**.
- Figura 4.12 Gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos.

- Figura 4.13 Corrente no enrolamento do gerador – medição.
- Figura 4.14 Tensão de linha (azul) e corrente (vermelho) na carga resistiva – medição.
- Figura 4.15 Corrente no enrolamento do gerador – simulação.
- Figura 4.16 Tensão na carga resistiva – simulação.
- Figura 4.17 Corrente na carga resistiva – simulação.
- Figura 4.18 Modelo em 3D (a) e 2D (b) do motor de ímã permanente com fluxo axial (da base para o topo: núcleo do rotor, ímã permanente, entreferro, núcleo do estator; os enrolamentos não são mostrados).
- Figura 4.19 FEM *versus* tempo para os modelos em 2D e 3D com a formulação \mathbf{a} .
- Figura 4.20 FEM *versus* tempo para os modelos em 2D e 3D com as formulações \mathbf{a} e \mathbf{h} .
- Figura 4.21 FEM *versus* tempo com a formulação \mathbf{a} com e sem os elementos deformados na BM.
- Figura 4.22 Indução magnética ao longo do entreferro com as formulações \mathbf{a} e \mathbf{h} (no tempo $t = 0$ s).
- Figura 4.23 FEM *versus* tempo sem e com correntes de Foucault no rotor (formulação \mathbf{a}).
- Figura 4.24 Motor de ímãs permanentes com fluxo magnético transversal.
- Figura 4.25 Caminho do fluxo magnético na máquina com fluxo transversal.
- Figura 4.26 Domínio de estudo e malha 3D.
- Figura 4.27 Distribuição do campo fonte \mathbf{h}_s . O suporte desse campo é definido nas bobinas e nas superfícies de corte.
- Figura 4.28 FEM por fase – simulação.
- Figura 4.29 FEM em 200 rpm – resultado medido.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 POSICIONAMENTO DO PROBLEMA E MOTIVAÇÃO DA PESQUISA

A teoria de Maxwell permite descrever o conjunto dos fenômenos eletromagnéticos. Esta teoria é dada pelas equações de derivadas parciais ligando os campos magnético e elétrico. Para os casos simples, essas equações têm soluções analíticas dando uma distribuição exata dos campos nos dispositivos estudados. Entretanto, a maioria dos problemas de eletromagnetismo são complexos (geometria complicada, não-linearidade, interação entre vários fenômenos, etc.) e sua resolução é inviável com métodos analíticos, a menos da utilização de hipóteses simplificadoras. Em consequência, torna-se necessário recorrer aos métodos de resolução numéricos, apelando às técnicas de discretização. Estes métodos transformam as equações de derivadas parciais em sistemas de equações algébricas cuja solução fornece uma aproximação dos campos eletromagnéticos.

Com o advento dos computadores digitais, métodos numéricos puderam ser usados para resolver problemas de eletromagnetismo. Inicialmente utilizou-se o método de diferenças finitas e o método de Monte Carlo e desde o final de década de 60, o método de elementos finitos nodais [1]. O método de elementos de aresta aparece nos anos 80 [2] [3]. O método de elementos finitos é o mais utilizado, pois se adapta facilmente às geometrias complexas, contrariamente ao método de diferenças finitas mais restritivo neste aspecto. Ele é baseado em uma dupla discretização: a do domínio geométrico estudado e aquela dos campos escalares e vetoriais incógnitos. A precisão da solução obtida está diretamente ligada a discretização. A solução obtida fornece uma aproximação das grandezas locais que são os campos magnético e elétrico. Estas grandezas são exploradas para determinar as grandezas globais como correntes, perdas, reatância, torques, etc.

No método de elementos finitos nodais grandezas escalares são obtidas. No entanto, usando-se elementos finitos com variáveis vetoriais, necessita-se separar o vetor em suas componentes e aplicar sobre cada componente elementos nodais [4]. Elementos de aresta são definidos como elementos vetoriais. As funções de forma destes elementos representam quantidades vetoriais, como por exemplo, a circulação do potencial vetor magnético sobre as arestas, e por esta razão eles podem ser naturalmente acoplados às equações vetoriais de um modo simples e direto [5] [6] [7] [8].

A expansão dos setores produtivos tem levado a uma utilização cada vez maior de dispositivos eletromagnéticos e para os fabricantes de equipamentos é imprescindível à contínua busca de melhor avaliação das grandezas eletromecânicas (indução, força, temperatura, geometria, etc.), com vistas a uma otimização das perdas de energia (aquecimento), comportamento dinâmico, vibrações eletromecânicas, e conseqüentemente da vida útil dos mesmos. A redução dos custos e aumento da qualidade do produto são componentes indispensáveis para o sucesso de uma empresa, nesta época de globalização do mercado. A utilização das ferramentas numéricas visa facilitar as fases de concepção e de otimização dos dispositivos eletromagnéticos (redução do número de protótipos, otimização da geometria, controles não destrutivos, etc.).

A princípio, todos os sistemas eletromagnéticos devem ser modelados em três dimensões. No entanto, muitas máquinas e aparelhos elétricos e magnéticos privilegiam uma direção particular de estabelecimento dos campos ou das correntes e podem, assim, serem estudados pelos modelos bidimensionais. Por outro lado, em certos problemas, a utilização de um cálculo tridimensional é necessária a fim de levar em conta a geometria real e os efeitos de extremidades.

A representação bidimensional simplifica bastante o problema tanto do ponto de vista de formulações como da implementação computacional, mas é em alguns casos restritiva. A representação em três dimensões por outro lado é menos restritiva, mas apresenta ainda hoje grandes dificuldades tanto ao nível de formulação matemática como no tocante a implementação computacional.

No Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (GRUCAD) do Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, duas teses de Doutorado foram defendidas acerca da modelagem tridimensional de estruturas magnéticas utilizando os chamados elementos de aresta, técnica e tema de pesquisa atual dentro da comunidade científica da área:

a) A tese de Antônio Carlos Pinho que consistiu na elaboração de um software baseado no pacote computacional FEECAD (previamente desenvolvido no GRUCAD), que permite o acoplamento das equações do campo eletromagnético com as dos circuitos de alimentação genéricos. Para a representação dos fenômenos magnéticos foram utilizados elementos de aresta hexaédricos e uma formulação baseada no potencial vetor magnético \mathbf{a} (orientador Professor Dr. Nelson Sadowski, co-orientador Professor Dr. João Pedro Assumpção Bastos) [9] [10] [11].

b) A tese de José Airton Azevedo dos Santos que originou também um software baseado em elementos de aresta tetraédricos (orientador Professor Dr. João Pedro Assumpção Bastos, co-orientador Professor Dr. Nelson Sadowski) [12] [13]. Os estudos consistiram na resolução de problemas estáticos com fontes de corrente conhecidas.

Em ambos os casos, além das dificuldades de desenvolvimento das teses propriamente ditas, foram encontradas restrições nos programas de geração de malha em três dimensões.

1.2 PROPOSTA DE TESE E OBJETIVOS

Dando seqüência aos estudos de cálculo de campos tridimensionais realizados no GRUCAD e para contemplar mais os fenômenos existentes, é necessária a inserção de metodologias que permitam levar em consideração o movimento das partes móveis de uma maneira geral. Bem que esta generalização seja difícil de ser feita para todas as possíveis estruturas magnéticas, para o caso de máquinas elétricas rotativas ela é factível. Na implementação numérica deste procedimento, o objetivo foi trabalhar com elementos de aresta. Objetivo adicional foi ainda a implementação dentro deste software do acoplamento das equações de campo magnético com aquelas do circuito de alimentação, como feito na primeira Tese acima para elementos de aresta hexaédricos. Salientemos que, neste novo enfoque com outros tipos de elementos, outras dificuldades foram encontradas.

Durante o período de outubro de 1998 a setembro de 1999, estive no GRUCAD o Dr. Patrick Dular da Université de Liège (Bélgica), por ocasião de seu Pós-Doutorado. O Dr. Patrick Dular colocou à disposição do laboratório um gerador de malhas de elementos finitos em 3D com facilidades de pré e pós-processamento (Gmsh) e um software para tratamento de problemas discretos (GetDP). O software GetDP é utilizado para a solução numérica de equações integro-diferenciais, aberto para o acoplamento de problemas físicos (eletromagnético, térmico, mecânico, etc.), bem como de métodos numéricos (método de elementos finitos, métodos integrais, etc.). Ele pode tratar de problemas de várias dimensões (1D, 2D e 3D) e estados de tempo (estático, transiente ou harmônico). O contato pessoal mantido com ele foi de extrema importância, como elemento motivador e para discussão deste trabalho, relevando os interesses comuns. Isso originou um doutorado “sanduíche” realizado no período de abril de 2001 até início de outubro de 2002 durante o qual recebemos uma bolsa de doutorado sanduíche do CNPq (primeiros doze meses) e uma bolsa de doutorado da Universidade de Liège (últimos seis meses).

A implementação da técnica para considerar o movimento e as condições de periodicidade e anti-periodicidade foram realizadas no software GetDP.

A aplicação das abordagens tridimensionais para modelar máquinas elétricas girantes apresenta certas dificuldades que podem ser resumidas em dois pontos: os tempos de cálculo e a malha. Os tempos de cálculo dependem de vários fatores que podem ser inerentes ao modelo e/ou aos elementos externos. Esses últimos são principalmente a velocidade do computador e sua capacidade de memória. A segunda dificuldade é a realização da malha de uma estrutura tão complexa quanto uma máquina elétrica. A descrição da geometria é frequentemente difícil no nível

das cabeças de bobinas, dos anéis de curto circuito ou de uma armadura inclinada. Além da descrição da geometria, a realização da malha deve levar em conta a técnica adotada para simular o movimento e as condições de periodicidade. Essas últimas são aplicadas a problemas que apresentam uma repetitividade periódica, podendo ser estudados através de uma seção elementar repetitiva e assim conseguir-se reduzir o domínio de estudo. No que concerne ao movimento, é preciso escolher o tipo de malha a utilizar no nível do entreferro. As condições de periodicidade devem ser satisfeitas com as correspondências entre as incógnitas.

Na realização dos estudos propostos, teve-se como objetivo estudar o software GetDP da Universidade de Liège e modificá-lo de modo que o mesmo seja capaz de representar, ao mesmo tempo, os seguintes fenômenos:

- a) O movimento do rotor de máquinas elétricas girantes;
- b) A alimentação em tensão destes dispositivos;
- c) O acoplamento das equações do campo eletromagnético com as dos circuitos de alimentação de maneira geral.

De modo geral, o trabalho consiste no estudo e desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos tridimensionais, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação, destinados à análise de problemas de eletromagnetismo, e em particular os problemas de eletrotécnica em máquinas elétricas girantes.

O modelo de partida são as equações de Maxwell, que regem o conjunto dos fenômenos eletromagnéticos clássicos. As hipóteses de trabalho em eletrotécnica permitem extrair um modelo dinâmico que constitui o problema de magnetodinâmica. Sua solução permite caracterizar a evolução temporal dos campos eletromagnéticos no espaço, e em particular, aqueles de correntes induzidas nos materiais condutores, em presença de certas fontes. No caso do regime estático, temos o problema da magnetostática.

Existem diversas formulações dos problemas da magnetostática e da magnetodinâmica, todas equivalentes ao modelo de partida, mas que se distinguem pela utilização de diversos potenciais, escalares e vetoriais [14] [15] [16] [17] [18]. Esses potenciais são as ferramentas matemáticas e são os intermediários para a determinação dos campos eletromagnéticos. A definição geral dos potenciais escalares necessita da introdução da noção de corte, a fim de tratar os potenciais multivalores, assim como os potenciais vetores necessitam a introdução do calibre, a fim de assegurar a unicidade destes potenciais [19] [20] [21] [22] [23].

Os conversores eletromecânicos são os dispositivos eletromagnéticos que por definição comportam partes em movimento. Trata-se, por exemplo, da rotação para máquinas elétricas girantes ou da translação para os eletroímãs. A modelagem numérica de tais sistemas necessita de

técnicas que permitam levar em conta o movimento. Existem alguns métodos que levam em conta o movimento, como por exemplo:

- a) métodos integrais como o método de integrais de fronteiras [24] e uma solução analítica do campo magnético no entreferro obtida por meio de um macro-elemento [25].
- b) método de recolagem das malhas como os multiplicadores de Lagrange [26] [27] [28] [29] [30] [31], o método de interpolação ou extrapolação nodal [32] [33] [34], e a linha de deslizamento em 2D e a superfície de deslizamento em 3D [35] [36] [37] [38].
- c) técnicas de remalhagem como remalhagem completa e a remalhagem parcial – banda de movimento [39] [40] [41] [42] [43].

Dentro destes métodos, optou-se pela técnica da banda de movimento a qual foi implementada nas diversas formulações utilizando potenciais.

Uma atenção especial foi dada à consistência das condições de periodicidade e da técnica da banda de movimento com as condições de calibre e com os campos magnéticos fontes.

Existem alguns trabalhos apresentando uma metodologia de acoplamento entre as equações dos campos magnéticos com os circuitos elétricos de alimentação. Desenvolveu-se, no GRUCAD, um equacionamento para a resolução simultânea das equações do campo com as equações do circuito para se obter o comportamento do dispositivo eletromagnético alimentado por conversores estáticos. Representações em duas e três dimensões da estrutura eletromagnética são empregadas [42]. Referente ao circuito elétrico, quando a estrutura do conversor é simples, a representação do circuito de alimentação elétrico pode ser dada por um conjunto de configurações correspondentes às diferentes seqüências de operação conhecidas a “priori”.

Quando a topologia do circuito de alimentação é mais complexa, suas seqüências de operação não são fáceis de serem identificadas a “priori”. Deste modo, um método mais geral deverá ser empregado. Em [44], para uma representação bidimensional da estrutura eletromagnética associada com conversores estáticos, uma formulação de variáveis de estado foi empregada com sucesso e é a metodologia que empregamos também no nosso trabalho.

1.3 CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

Este trabalho contribui para a modelagem tridimensional de máquinas elétricas. Como contribuição original pode-se citar:

- a) a implementação das condições de periodicidade e anti-periodicidade, tanto para a formulação conforme \mathbf{b} quanto para a formulação conforme \mathbf{h} usando elementos de aresta.

- b) a implementação da técnica da banda de movimento para ambas as formulações. Esta técnica foi implementada de modo geral tanto para análise de movimento rotacional quanto de movimento translacional. Além disso, pode-se usar mais do que uma banda de movimento.
- c) a técnica da banda de movimento apresenta uma restrição quando os elementos situados na banda sofrem deformação, causando ruído numérico. Este problema foi solucionado, nos problemas estudados, usando-se elementos hierárquicos na banda de movimento.
- d) o acoplamento das equações de campo eletromagnético com as dos circuitos de alimentação já havia sido implementado no GetDP pelo Dr. Patrick Dular em seu pós-doutorado no Brasil. No entanto, quando se usa circuito externo contendo interruptores é necessário analisar a comutação das mesmas através de um método onde o passo de tempo é variável. Neste caso, o rotor deve ser posicionado na posição do passo de tempo correspondente.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em cinco capítulos. Inicialmente, neste primeiro capítulo, são expostos os objetivos, relevância do trabalho, revisão da literatura e contribuições originais.

No capítulo II são lembrados alguns conceitos básicos associados ao eletromagnetismo e ao método de elementos finitos. Apresenta-se, também, as formulações para os problemas de magnetostática e magnetodinâmica tanto na forma forte quanto na forma fraca.

O capítulo III apresenta o acoplamento das equações magnéticas e elétricas, as condições de periodicidade e anti-periodicidade e os métodos para levar em conta o movimento.

No capítulo IV, apresentam-se os resultados obtidos para três topologias de máquinas elétricas. Essas topologias são chamadas de fluxo radial, axial e transversal. Finalmente, no capítulo V, tem-se a conclusão deste trabalho com as perspectivas do assunto em questão.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o problema a ser resolvido: as equações de Maxwell, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. A partir dessas equações serão apresentadas as diferentes formulações matemáticas para os problemas de magnetostática e magnetodinâmica tanto na forma forte quanto na forma fraca. Entre essas formulações o interesse maior será por aquelas que utilizam potenciais escalares e/ou vetoriais.

Em seguida, apresenta-se a discretização dos campos pelo método de elementos finitos, em particular o método de Galerkin.

2.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL EM MEIOS CONTÍNUOS

As equações de Maxwell são as leis físicas que regem os campos eletromagnéticos e constituem um sistema de equações de derivadas parciais. Nos meios contínuos, estas equações são as seguintes [4]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d} , \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 , \quad (2.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} , \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho , \quad (2.4)$$

onde \mathbf{h} é o campo magnético (A/m), \mathbf{j} é a densidade de corrente de condução (A/m²), \mathbf{d} a densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica (C/m²), \mathbf{e} o campo elétrico (V/m), \mathbf{b} a indução

magnética ou densidade de fluxo magnético (T) e ρ a densidade volumétrica de carga elétrica (C/m³).

Neste estudo, assume-se que os vetores de campo são finitos em seu domínio e que, em todos os pontos ordinários, eles sejam funções contínuas com derivadas contínuas. Por ponto ordinário entende-se um ponto em cuja vizinhança as propriedades constitutivas do meio (permeabilidade, permissividade e condutividade) sejam contínuas [45]. Descontinuidades nos vetores de campo ou em suas derivadas podem ocorrer, entretanto, em superfícies onde exista uma mudança abrupta das propriedades constitutivas do meio.

A equação (2.1) é uma generalização da lei de Ampère e a equação (2.3) é chamada lei de Faraday. Elas constituem as equações ditas de acoplamento eletromagnético, enquanto que as equações (2.2) e (2.4) constituem as equações ditas de conservação.

Em eletrotécnica, onde se trabalha em baixas frequências, a densidade da corrente \mathbf{j} é considerada muito maior que a densidade de corrente de deslocamento $\partial_t \mathbf{d}$ e se utiliza, então, as equações de Maxwell na forma quase-estática [4]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad (2.5)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (2.7)$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho. \quad (2.8)$$

Aplicando-se o operador div em ambos os lados da equação (2.5), obtém-se a equação da continuidade de corrente:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (2.9)$$

2.3 LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Um segundo conjunto de relações é necessário para completar a informação contida no sistema das equações de Maxwell: as relações constitutivas. Essas relações, chamadas também de leis de comportamento, exprimem as propriedades dos materiais. Se μ (H/m) representa a permeabilidade magnética, ε (F/m) a permissividade elétrica e σ (s/m) a condutividade elétrica, as leis de comportamento, para materiais isotrópicos, se enunciam como segue [46]:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} + \mathbf{b}_r, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} , \quad (2.11)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} , \quad (2.12)$$

onde \mathbf{b}_r é a indução magnética remanente, a qual é acrescentada para tratar ímãs permanentes porventura existentes no domínio. Em certos casos μ , ε e σ tem um caráter tensorial e seu valor não é constante.

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

2.4.1 Condições homogêneas

Condições de contorno adequadas devem ser aplicadas sobre a fronteira do domínio de estudo Ω para assegurar a unicidade da solução. Elas podem ser, conforme o problema considerado, relativas aos componentes tangenciais de \mathbf{e} e \mathbf{h} , e aos componentes normais de \mathbf{d} , \mathbf{j} e \mathbf{b} .

Na fronteira Γ do domínio global Ω (ver Figura 2.1), considera-se algumas condições de contorno ditas condições homogêneas.

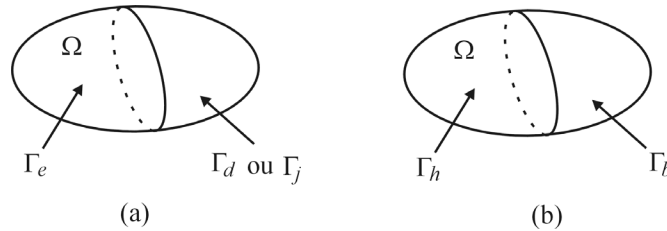


Figura 2.1 - Domínio estudado: (a) grandezas elétricas e (b) grandezas magnéticas.

Para as grandezas elétricas, sobre as partes complementares das superfícies Γ_e e Γ_d (ou Γ_j) de Γ , eventualmente não conexas, definem-se as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0. \quad (2.13-14-15)$$

Para as grandezas magnéticas, sobre as partes complementares das superfícies Γ_h e Γ_b de Γ , eventualmente não conexas, definem-se as condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0. \quad (2.16-17)$$

Essas condições de contorno homogêneas sobre os campos ocorrem por razões:

- a) *físicas* – condições no infinito ou associadas aos materiais idealizados. Por exemplo, as equações (2.13) e (2.16), respectivamente, para os materiais condutores perfeitos e magnéticos perfeitos, ou seja, de condutividade e permeabilidade infinitas;
- b) *simetria* – quando fixa-se a direção dos campos.

2.4.2 Condições de Transmissão dos Campos

Na interface entre materiais com diferentes propriedades constitutivas, os campos eletromagnéticos sofrem descontinuidades.

Considere uma superfície Σ entre os dois meios contínuos, representados pelos subdomínios Ω_1 e Ω_2 (ver Figura 2.2).

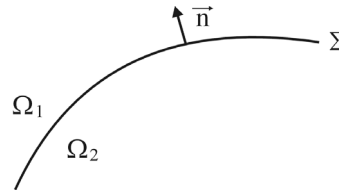


Figura 2.2 - Superfície Σ entre dois meios contínuos Ω_1 e Ω_2 .

As equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) podem ser integradas sobre os volumes ou as superfícies incluindo as partes da superfície Σ . A aplicação do teorema da divergência ou do teorema de Stokes conduz as seguintes condições de transmissão [4]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \big|_{\Sigma} = \mathbf{j}_s, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \big|_{\Sigma} = \rho_s, \quad (2.21)$$

onde \mathbf{j}_s e ρ_s representam, respectivamente, as densidades de corrente e de carga concentradas sobre a superfície Σ , e onde \mathbf{n} é a normal à Σ , orientada de Ω_1 para Ω_2 .

As relações (2.19) e (2.20) acarretam que a componente tangencial de \mathbf{e} e a componente normal de \mathbf{b} são contínuas através de Σ . Se \mathbf{j}_s e ρ_s são diferentes de zero, as relações (2.18) e (2.21) acarretam a descontinuidade da componente tangencial de \mathbf{h} e da componente normal de \mathbf{d} [35] [46]. Em geral, considera-se \mathbf{j}_s e ρ_s nulos e então, a componente tangencial de \mathbf{h} e a

componente normal de \mathbf{d} passam a ser contínuas na interface. A partir da equação (2.9), pode-se exprimir a continuidade da componente normal da densidade de corrente:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \big|_{\Sigma} = 0. \quad (2.22)$$

2.4.3 Grandezas globais impostas do tipo fluxo e do tipo circulação

Além das condições de contorno locais, as condições globais sobre os campos podem ser impostas através dos funcionais dos tipos fluxo e circulação.

As condições globais do tipo fluxo estão relacionadas com a carga elétrica total Q , a intensidade de corrente I e o fluxo magnético Ψ . Já, as do tipo circulação, relacionam-se com a força eletromotriz V e a força magnetomotriz Φ . Esses fluxos, através das superfícies Γ_i situadas sobre a fronteira do domínio de estudo, e as circulações, ao longo das curvas γ_i pertencendo ao domínio, são definidas por:

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \, ds = Q_i, \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, ds = I_i, \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \, ds = \Psi_i \quad (2.23-24-25)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = V_i, \quad \int_{\gamma_i} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_i, \quad (2.26-27)$$

onde \mathbf{n} representa o campo de vetores unitários normal à Γ_i e orientados para o exterior de Ω .

2.5 EXPRESSÕES INTEGRAIS: NOTAÇÕES

Com o intuito de simplificar as expressões deste texto, definem-se as seguintes notações, relativas as integrais sobre um volume Ω e uma superfície Γ :

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u v \, d\Omega, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega,$$

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

com u , v , \mathbf{u} e \mathbf{v} definidos sobre Ω e Γ tais que essas integrais tenham um sentido, em geral, elas podem ser definidas nos espaços de Sobolev de campos escalares e vetoriais, isto é,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \partial_x u, \partial_y u, \partial_z u \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \partial_x \mathbf{u}, \partial_y \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}.$$

O estabelecimento das formulações fracas associadas aos problemas de derivadas parciais consideradas, e sobre os quais se baseia o método de elementos finitos conduz às duas fórmulas de Green dadas por:

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v) + (\text{div } \mathbf{u}, v) = \langle v, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) - (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Estas equações são estabelecidas a partir das seguintes relações da análise vetorial

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{div } \mathbf{u} = \text{div } (v \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{div } (\mathbf{v} \times \mathbf{u}),$$

integradas sobre o domínio Ω , com a aplicação do teorema da divergência para a obtenção dos termos em integral de superfície.

A *estrutura de base*, formada de quatro espaços funcionais e de três operadores, é representada abaixo. Ela é constituída de duas cópias de $L^2(\Omega)$, de duas cópias de $L^2(\Omega)$, e dos operadores diferenciais gradiente, rotacional e divergente:

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}_h} L^2(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}_h} L^2(\Omega) \xrightarrow{\text{div}_h} L^2(\Omega).$$

Os três operadores diferenciais são os operadores cujo domínio são definidos de maneira restritiva [46]:

$$F_h^0 = \{ v \in L^2(\Omega); \text{grad } v \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma_h} = 0 \};$$

$$F_h^1 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}|_{\Gamma_h} = 0 \};$$

$$F_h^2 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_h} = 0 \}.$$

Os operadores adjuntos dos operadores grad_h , rot_h e div_h , anulando-se o termo de superfície devido às condições de contorno homogêneas [46] são:

$$F_b^2 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_b} = 0 \};$$

$$F_b^1 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}|_{\Gamma_b} = 0 \};$$

$$F_b^0 = \{ v \in L^2(\Omega); \text{grad } v \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma_b} = 0 \}.$$

A *estrutura dual* apresenta propriedades similares à *estrutura de base* e está representada abaixo [46]:

$$L^2(\Omega) \xleftarrow{\text{div}_b} L^2(\Omega) \xleftarrow{\text{rot}_b} L^2(\Omega) \xleftarrow{\text{grad}_b} L^2(\Omega).$$

2.6 SUPOSIÇÕES E DEFINIÇÕES

Nesta seção serão apresentadas as hipóteses nas quais serão baseados todos os desenvolvimentos a seguir.

2.6.1 Região limitada Ω

O domínio limitado Ω do espaço euclidiano tridimensional está representado na Figura 2.3. A fronteira $\partial\Omega$ de Ω é simbolizada por Γ . O campo de vetores unitários normal sobre Γ é simbolizado por \mathbf{n} .

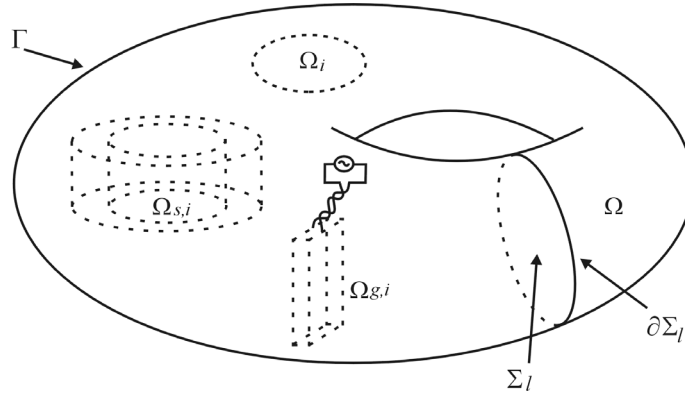


Figura 2.3 – Domínio Ω e suas respectivas sub-regiões.

A fronteira Γ pode consistir de $c+1$ superfícies fechadas Γ_i , $i=0, \dots, c$, o que significa que existem c cavidades em Ω . A região Ω pode também conter l loops, se existe l superfícies de corte Σ_i , $i=1, \dots, l$, dentro de Ω . Esses cortes são usados para tornar o domínio simplesmente conexo. Um algoritmo geral para construir tais superfícies de corte quando Ω é discretizado por uma malha de tetraedros é proposto por Kotiuga em [47].

2.6.2 Subconjuntos de Ω

Nesta seção são definidas algumas sub-regiões de Ω . A primeira separação é realizada entre as partes condutoras (onde $\sigma > 0$) e as partes não condutoras de Ω : a parte condutora é simbolizada por Ω_c e a parte não condutora por Ω_c^C , com $\Omega_c^C = \Omega - \Omega_c$.

Define-se, então, os seguintes subconjuntos de Ω :

1. Ω_s é composto de todos os domínios indutores $\Omega_{s,i}$, $i = 1, \dots, s$, conduzindo uma densidade de corrente fonte imposta $\mathbf{j}_{s,i}$. Assumir-se-á que $\Omega_s \subset \Omega_c^C$;
2. Ω_g é composto de todos os domínios fontes $\Omega_{g,i}$ (também chamados de geradores de força eletromotriz, ou apenas geradores), $i = 1, \dots, g$, onde ou uma tensão global V_i ou uma corrente global I_i é imposta (ou, de um modo mais geral, onde ambos V_i e I_i são a priori incógnitas quando se considera um acoplamento com equações de circuito). Cada gerador $\Omega_{g,i}$ é ou um subconjunto de Ω_c ou de Ω_c^C .
3. Ω_i é composto de todos os domínios contendo ímãs permanentes.

2.6.2.1 Conjunto dos indutores Ω_s

Este primeiro tipo de região fonte, o qual é um subconjunto de Ω_c^C , é composto de indutores idealizados $\Omega_{s,i}$, $i = 1, \dots, s$, onde a densidade de corrente fonte \mathbf{j}_s é imposta, e assumida ser independente dos campos eletromagnéticos locais [48]. Este é o caso dos indutores finos, os quais consistem de um enrolamento de N_i espiras de fio condutor tendo um diâmetro muito menor do que a profundidade pelicular, com uma entrada e uma saída de corrente. Tais indutores podem ser modelados pela definição do campo magnético fonte \mathbf{h}_s , verificando

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s \text{ em } \Omega_s, \quad (2.28)$$

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = 0 \text{ em } \Omega_s^C. \quad (2.29)$$

Visto que esse campo não é único, pois sua divergência não é imposta, tem-se alguma liberdade para calculá-lo (ver item 2.10). Ω_s^C é a parte complementar de Ω_s onde \mathbf{j}_s é nulo.

2.6.2.2. Conjunto dos geradores Ω_g

O segundo tipo de região fonte é uma idealização de uma fonte de força eletromotriz localizada entre dois condutores (sendo dois eletrodos muito próximos um do outro) de um

domínio indutor, e é um subconjunto de Ω_c ou Ω_c^C [48]. Consideram-se dois conjuntos de indutores para serem conectados a esse gerador:

1. Ω_s é composto de todos os indutores finos $\Omega_{s,i}$, $i = 1, \dots, s$. Neste caso a densidade de corrente efetiva não é conhecida previamente e o indutor fino está conectado a um gerador impondo uma tensão ou corrente global. Assim, definem-se campos fontes $\mathbf{h}_{s,i}$ independentes associados com cada indutor $\Omega_{s,i}$, isto é, satisfazendo

$$\text{rot } \mathbf{h}_{s,i} = \mathbf{j}_{s,i} \text{ em } \Omega_{s,i}, \quad (2.30)$$

$$\text{rot } \mathbf{h}_{s,i} = 0 \text{ em } \Omega_{s,i}^C. \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{j}_{s,i}$ é a densidade de corrente equivalente de uma corrente unitária fluindo nas N_i espiras do indutor i_{th} em Ω_s .

2. Ω_m é composto de todos os indutores maciços $\Omega_{m,i}$, $i = 1, \dots, m$. Indutores maciços pertencem a um subconjunto do domínio condutor onde ocorrem correntes induzidas ($\Omega_m \subset \Omega_c$). Esses indutores são feitos de uma peça de material condutor, onde as correntes podem ser distribuídas não uniformemente se a profundidade pelicular é menor do que algumas de suas dimensões.

Independente do tipo de indutor usado, cada gerador $\Omega_{g,i}$ tem uma tensão V_i e uma corrente I_i fluindo através da superfície $\Gamma_{g,i}^+$ (isto é, um dos eletrodos, considerado como uma seção transversal do indutor: ver Figura 2.4).

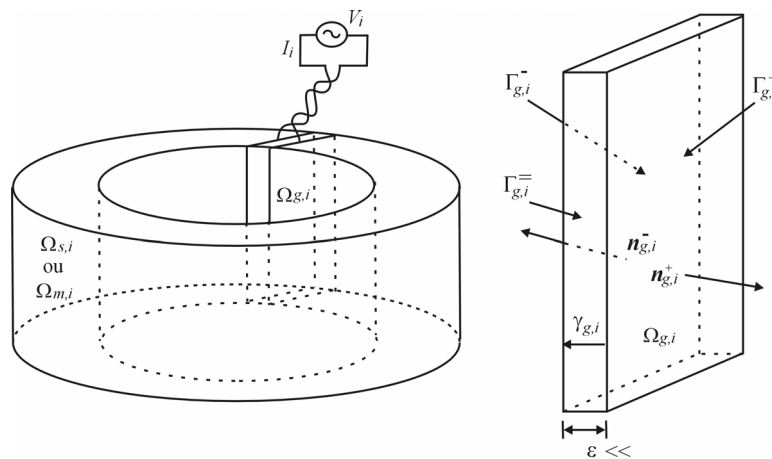


Figura 2.4 - Modelo de um indutor com fonte de força eletromotriz em $\Omega_{g,i}$.

Para indutores maciços o campo elétrico \mathbf{e} em $\Omega_{g,i}$ pode ser considerado como sendo incógnita (como um campo elétrico conservativo) e sua circulação ao longo de qualquer caminho de um eletrodo para o outro em $\Omega_{g,i}$ é de fato a tensão aplicada V_i . Tem-se então,

$$\int_{\gamma_{g,i}} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = V_i \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{g,i}^+} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, ds = I_i. \quad (2.32-33)$$

Para indutores finos, a condição (2.32) tem de ser expressa como a soma das circulações de \mathbf{e} para todos os condutores, e (2.32-33) tornam-se:

$$\sum_{j=1}^{N_i} \int_{\gamma_{g,i,j}} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = V_i \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{g,i}^+} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, ds = N_i I_i, \quad (2.34-35)$$

onde $\gamma_{g,i,j}$ é um caminho em $\Omega_{g,i}$ conectando o j_{th} condutor sobre seus dois eletrodos.

Entretanto, para todos os tipos de indutores, deve-se satisfazer as condições locais:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_{g,i}} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\partial\Omega_{s,i} \text{ ou } \partial\Omega_{m,i}} = 0. \quad (2.36-37)$$

Para a conexão com o circuito externo, faz-se a seguinte hipótese: este circuito externo é considerado estando longe da estrutura principal e conectado a ela através de pares entrelaçados (Figura 2.4).

A sub-região $\Omega_{g,i}$ tem uma característica interessante: seu comportamento pode ser descrito pelos valores dos campos eletromagnéticos em suas fronteiras.

Os geradores $\Omega_{g,i}$ são regiões ativas, as quais contém fontes de campos eletromagnéticos. Interessa-se na distribuição do campo eletromagnético dentro dessas regiões. As relações importantes para se obter são entre os valores globais associados com o gerador, tais como a tensão e a corrente.

2.7. FORMULAÇÕES ESTUDADAS

Existem vários trabalhos apresentando diversas formulações para os problemas da magnetostática e da magnetodinâmica [14] [15] [16] [17] [18].

Foram escolhidas duas formulações para o problema da magnetostática e duas formulações para o problema da magnetodinâmica para implementar as condições de periodicidade e anti-periodicidade e a técnica para levar em conta o movimento.

2.7.1 Problema da magnetostática

Quando os fenômenos estudados são independentes do tempo, as derivadas temporais nas equações de Maxwell se anulam e as grandezas magnéticas e elétricas são desacopladas. A magnetostática consiste no estudo dos fenômenos magnéticos em regime estacionário. O campo magnético é então invariante no tempo e só é devido as correntes estacionárias impostas ou a ímãs permanentes [35].

As equações de Maxwell a considerar são:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} , \quad (2.38)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 . \quad (2.39)$$

Acrescenta-se a essas duas equações a lei de comportamento magnético (2.10), isto é,

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} + \mathbf{b}_r . \quad (2.40)$$

As condições de contorno sobre a fronteira Γ (veja Figura 2.1) do domínio Ω são as seguintes [46]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0 , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0 \quad \text{com } \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b . \quad (2.41-42)$$

Estas condições de contorno podem se apresentar sobre os planos de simetria. A primeira condição pode também se apresentar se o domínio exterior à Ω em contato com Γ_h tem uma permeabilidade magnética infinita.

As restrições globais que podem ser definidas são relativas ao fluxo magnético Ψ (equação (2.25)) e a força magnetomotriz Φ (equação (2.27)), cuja relação define o inverso de uma relutância.

Essa forma inicial do problema constitui sua *formulação forte*.

Vários métodos foram propostos na literatura para a resolução por elementos finitos deste problema. Neste trabalho serão apresentadas as utilizações do potencial escalar total, do potencial escalar reduzido e do potencial vetor magnético.

2.7.1.1. Formulação em potencial escalar magnético:

Potencial Escalar Total

Se no domínio Ω , onde se estuda o problema magnetostático, não existirem correntes, a equação (2.38) torna-se:

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0 . \quad (2.43)$$

Este é o caso dos dispositivos para os quais os campos são criados por forças magnetomotrizes exteriores e independentes do sistema estudado e/ou por ímãs permanentes. O campo \mathbf{h} é irrotacional. Desta maneira, pode-se definir um potencial escalar magnético φ , tal que [4]:

$$\mathbf{h} = - \text{grad } \varphi . \quad (2.44)$$

Na relação acima, o potencial φ será único a menos de uma constante. Isto é, se φ_1 for solução do problema, então $\varphi_2 = \varphi_1 + k$, onde k é uma constante arbitrária, também será. Para haver unicidade da solução é necessário impor uma restrição ou uma condição de calibre sobre φ . Na prática, essa condição é geralmente obtida estipulando-se o valor do potencial φ em um ponto do domínio, ou seja, uma condição de Dirichlet sobre φ é suficiente para fixar esse calibre.

Além disso, a relação (2.44) não é tão direta. É necessário que Ω seja “simplesmente conexo”, isto é, sem “buracos” [23] [46]. Uma região R é dita ser conectada (ou conexa) se dois pontos quaisquer de R puderem ser ligados por um arco, onde todo ponto do arco pertence a R [49]. Uma região R é dita ser simplesmente conectada (ou conexa) se toda curva fechada em R puder ser continuamente reduzida a um ponto em R . A região R na Figura 2.5 é simplesmente conectada. Todavia, a região R na Figura 2.6 não é simplesmente conectada, porque a curva fechada C que circunda um dos “buracos” não pode ser continuamente reduzida a um ponto sem deixar R [49].

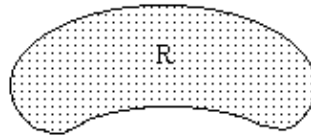


Figura 2.5 - Uma região simplesmente conectada (ou conexa).

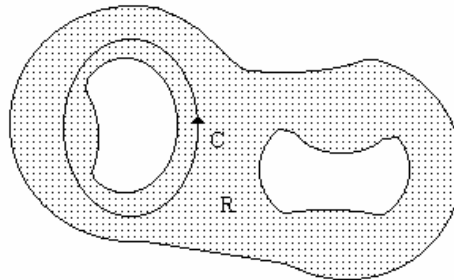


Figura 2.6 - Uma região que não está simplesmente (ou está multiplamente) conectada (ou conexa).

Aplicando (2.44) em (2.39) e (2.40), obtém-se [35] [46]:

$$\text{div}(-\mu \text{grad } \varphi + \mathbf{b}_r) = 0 . \quad (2.45)$$

Na interface entre dois meios de permeabilidades diferentes, a definição de um potencial φ contínuo assegura a continuidade da componente tangencial do campo magnético, enquanto que a continuidade da componente normal da indução está implícita na equação (2.45) [35].

É importante, entretanto, ser prudente quando se utiliza a formulação em potencial magnético escalar total. A relação (2.44) acarreta que a circulação do campo magnético ao longo de um caminho γ_{AB} , ligando dois pontos A e B, é igual a diferença dos valores do potencial escalar entre os pontos extremos desse caminho, isto é,

$$\int_{\gamma_{AB}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{AB}} -\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B. \quad (2.46)$$

Em particular, quando o caminho de integração é fechado, isto é, $A \equiv B$, a circulação de \mathbf{h} ao longo de γ_{AB} é nula pois $\varphi_A = \varphi_B$ [46]. Considere, por exemplo, a configuração da Figura 2.7. A região estudada é um toróide Ω , excitado magneticamente por um fio condutor percorrido por uma corrente I . A circulação de \mathbf{h} ao longo de um caminho fechado γ é nula. Entretanto, conforme o teorema de Ampère colocado sob a forma integral, essa circulação deve ser igual a corrente I .

A equação (2.46) é então incompatível com a lei de Ampère se γ envolve um condutor percorrido por uma corrente I não nula. A equação (2.44) do potencial magnético escalar total não é válida em todo ponto do espaço. Na verdade, é o lema de Poincaré que permite derivar um potencial escalar de um campo irrotacional, mas esse lema em geral se aplica localmente. O toróide é justamente um exemplo da não aplicação global do lema de Poincaré, pois ele apresenta um “buraco”.

Uma maneira elegante de suprimir a indeterminação sobre o potencial escalar magnético total consiste em efetuar um corte no toróide de forma a tornar o domínio simplesmente conexo (plano de corte Σ sobre a Figura 2.7). Neste corte, o potencial escalar é descontínuo e o salto no potencial é igual ao valor da corrente I .

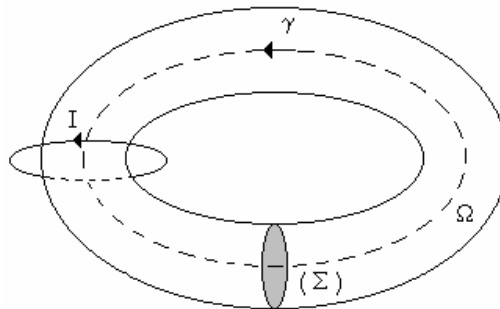


Figura 2.7 - Domínio de estudo toroidal.

O problema de um domínio multiplamente conexo é então tratado impondo um corte no domínio que permite torná-lo simplesmente conexo, o que significa que toda curva fechada traçada no interior do domínio poderá, então, ser deformada continuamente até ser reduzida a um ponto.

Potencial Escalar Parcial

O modelo anterior do potencial escalar total possui o inconveniente de não ser definido na presença de correntes. No entanto, é possível conservar uma formulação em potencial escalar quando se conhece a distribuição das fontes de corrente no domínio de estudo Ω . Assim, podem-se tratar os problemas comportando correntes introduzindo um potencial escalar reduzido ou parcial.

Neste caso, decompõe-se o campo magnético em duas partes:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_r, \quad (2.47)$$

onde o campo \mathbf{h}_s é escolhido tal que

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}. \quad (2.48)$$

O campo magnético fonte descrito pela equação (2.48) não é único, e desse modo há alguma liberdade para seu cálculo (ver item 2.10). Este pode, por exemplo, ser escolhido como o campo criado pela corrente quando todos os materiais magnéticos são removidos do domínio (isto é, assumindo $\mu = \mu_0$ em toda parte de Ω). Neste caso, \mathbf{h}_s é dado pela lei de Biot-Savart [46]:

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{x}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j} \wedge \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{x}_Q, \quad (2.49)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição do ponto de avaliação \mathbf{x}_P em relação ao ponto de integração \mathbf{x}_Q , isto é, $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$, e r é a distância entre esses pontos, isto é, $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|$ [46]. No entanto, existem outros métodos para o cálculo desse campo [50] [51].

Existe uma família de campos satisfazendo a equação (2.48). Em geral, escolhe-se o campo \mathbf{h}_s (então chamado campo fonte generalizado) igual a zero em quase todo o lugar fora dos condutores, exceto na vizinhança de seus cortes associados [48].

O campo \mathbf{h}_r é então causado pela magnetização dos materiais magnéticos e é chamado campo de reação. Este campo é então irrotacional e verifica:

$$\text{rot } \mathbf{h}_r = 0, \quad (2.50)$$

o que permite introduzir o potencial escalar magnético parcial ϕ , tal que:

$$\mathbf{h}_r = - \text{grad } \phi . \quad (2.51)$$

O campo magnético total \mathbf{h} se exprime, então: $\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \text{grad } \phi$.

É importante observar que a relação (2.51) só é válida se o domínio de estudo é simplesmente conexo, a menos que não exista nenhuma fonte de corrente exterior a esse domínio. Se ela existir, ela é levada em conta pelo campo \mathbf{h}_s e ϕ é sempre unívoco.

O potencial parcial ϕ , associado a \mathbf{h}_r , é também chamado potencial de reação.

Combinando (2.51) com (2.47), (2.40) e (2.39), tem-se:

$$\text{div} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi) + \mathbf{b}_r) = 0 . \quad (2.52)$$

A continuidade da componente tangencial do campo \mathbf{h}_r é assegurada se o potencial escalar parcial é igualmente contínuo. A equação (2.52) acarreta a continuidade da componente normal da indução associada ao campo total [35] [46].

Esse modelo magnetostático em potencial reduzido é extremamente interessante, pois permite levar em conta os problemas com fontes de excitação exteriores ou interiores, ímãs ou correntes.

Entretanto, nos materiais ferromagnéticos com alta permeabilidade, o campo magnético pode tomar valores muito fracos. Desse modo, o cálculo pode conduzir a resultados numéricos ruins. Na verdade, o módulo do campo magnético total \mathbf{h} aparece como a diferença de dois termos \mathbf{h}_s e $-\text{grad } \phi$. Os campos \mathbf{h}_s e \mathbf{h}_r são calculados de modos diferentes, mas seus módulos devem ser muito próximos. As imprecisões numéricas sendo inevitáveis, o erro cometido sobre \mathbf{h} pode ser considerável, implicando em erro inaceitável sobre a indução. Esses erros podem ser a origem de instabilidades numéricas nas técnicas de resolução desses problemas. Por causa disso, nos problemas magnetostáticos com corrente, prefere-se utilizar o acoplamento de potenciais escalares parcial e total [45]. Nesse caso, o potencial escalar reduzido é definido nas regiões condutoras e nas regiões onde a permeabilidade magnética é igual a do vácuo, enquanto que o potencial escalar total é utilizado nos materiais ferromagnéticos que devem ser desprovidos de corrente. Na interface dessas duas regiões, a relação seguinte deve ser verificada em todo ponto Q de Σ (sendo Σ a interface de dois desses meios):

$$\varphi|_{\Sigma} = \phi|_{\Sigma} - \int_{\Gamma_{PQ}} \mathbf{h}_s \cdot d\mathbf{s} ,$$

onde Γ_{PQ} é o caminho sobre a interface Σ ligando um ponto P fixo qualquer onde há a igualdade entre φ e ϕ , ao ponto Q .

2.7.1.2 Formulação em potencial vetor magnético:

A divergência da indução magnética é nula, equação (2.39). Isso significa fisicamente que toda linha de indução magnética se fecha sobre ela mesma e que o fluxo da indução através de toda superfície fechada é identicamente nulo. Isso decorre diretamente do fato de não existirem cargas magnéticas isoladas da mesma maneira que as cargas elétricas positivas ou negativas.

Uma segunda forma de enunciar essa propriedade fundamental da conservação de fluxo da indução magnética é de dizer que a indução é solenoidal. A condição, $\text{div } \mathbf{b} = 0$, permite então definir uma função potencial vetor magnético, \mathbf{a} , tal que:

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} . \quad (2.53)$$

Substituindo-se esta expressão em (2.40) e (2.38), obtém-se:

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \mathbf{a}) = \mathbf{j} + \text{rot } (\nu \mathbf{b}_r) , \quad (2.54)$$

onde ν é a relutividade magnética, igual ao inverso da permeabilidade magnética μ .

Pela relação (2.53), a continuidade da componente normal de \mathbf{b} está assegurada se a componente tangencial de \mathbf{a} é contínua. A condição da continuidade da componente tangencial de \mathbf{h} está implícita na equação (2.54) [46].

O potencial vetor magnético está diretamente ligado à noção de fluxo magnético. A relação (2.53) permite escrever pelo teorema de Stokes que o fluxo da indução magnética através de uma superfície Σ é igual a circulação do potencial vetor magnético ao longo de seu contorno $\partial\Sigma$, isto é:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} .$$

Nesta formulação, não existem dificuldades ligadas às regiões não simplesmente conexas, mas seu caráter vetorial acarreta um número de incógnitas elevado em relação às formulações em potencial escalar.

Um outro inconveniente é que ela necessita de impor condições suplementares para assegurar a unicidade da solução. De fato, seja, $\mathbf{a}_g = \mathbf{a} + \text{grad } \eta$, onde η é uma função escalar qualquer, teremos $\text{rot } \mathbf{a}_g = \text{rot } \mathbf{a}$. Assim, falta uma equação que permite fixar a função escalar e garantir a unicidade da solução. Uma tal equação é chamada equação de calibre [19] [21] [22]. Pode-se utilizar o calibre de Coulomb $\text{div } \mathbf{a} = 0$ que implica a continuidade da componente normal do potencial vetor \mathbf{a} . Uma outra possibilidade consiste em escolher a condição $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ onde \mathbf{w} é um campo de vetores cujas linhas de campo não são fechadas e são tais que podem ligar todos os pares de pontos quaisquer do domínio de estudo [19] [46] [52]. Por exemplo, sejam dois pontos P

e Q pertencendo ao domínio Ω com $P \neq Q$. Calculando a circulação de $\mathbf{a}_g = \mathbf{a} + \text{grad } \eta$ sobre um contorno α religando P a Q , obtém-se:

$$\int_{\alpha} \mathbf{a}_g \cdot d\mathbf{l} = \int_{\alpha} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} + \eta_Q - \eta_P. \quad (2.55)$$

Tomando como suporte para o contorno α uma linha de campo \mathbf{w} , as integrais da equação (2.55) são iguais a zero. Nessas condições, $\eta_Q = \eta_P$ o que conduz à $\text{grad } \eta = 0$ e assim, tem-se a unicidade da solução $\mathbf{a}_g = \mathbf{a}$.

A condição $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ é natural no espaço de elementos de aresta e sua implementação consiste em anular a circulação de \mathbf{a} ao longo de todas as arestas de uma árvore definida no domínio de estudo. Uma árvore, construída sobre as arestas de uma malha do domínio conexo, é um conjunto de arestas que liga todos os nós da malha entre elas sem formar um caminho fechado [19] [20] [46]. As arestas da malha que não estão na árvore constituem a co-árvore associada.

2.7.2 Problema da magnetodinâmica

O problema da magnetodinâmica consiste em resolver as equações de Maxwell no regime quase-estático (ou hipótese da eletrotécnica) [4]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad (2.56)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (2.57)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0. \quad (2.58)$$

Mais as equações constitutivas, para meios isotrópicos:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} + \mathbf{b}_r, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}. \quad (2.60)$$

O domínio Ω é escrito como $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_c^C$ onde Ω_c^C , neste caso, é a região não condutora. A densidade de corrente \mathbf{j} inclui as correntes fontes \mathbf{j}_s e as correntes de Foucault.

As condições de contorno sobre a fronteira Γ do domínio Ω (veja Figura 2.1) são as seguintes [46]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0 \quad \text{com } \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b. \quad (2.61-62)$$

Pode-se, também, escrever as condições de contorno sobre os campos \mathbf{h} e \mathbf{b} em função dos campos \mathbf{j} e \mathbf{e} (veja Figura 2.1) [46]:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_h} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_b} = 0 \quad \text{com } \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b. \quad (2.63-64)$$

Essa forma inicial do problema constitui sua *formulação forte*.

Existe uma série de formulações diferentes para resolver este problema, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Neste trabalho serão apresentadas duas formulações que utilizam elementos finitos.

2.7.2.1 Formulação conforme em \mathbf{h} – formulação $\mathbf{h} - \phi$:

Região Condutora: ($\sigma \neq 0$)

O método parte da equação (2.57)

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}. \quad (2.65)$$

Utilizando-se (2.60) e (2.59), obtém-se:

$$\text{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{j}) = -\partial_t (\mu \mathbf{h} + \mathbf{b}_r). \quad (2.66)$$

Aplicando (2.56) em (2.66), tem-se:

$$\text{rot}(\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}) + \partial_t (\mu \mathbf{h} + \mathbf{b}_r) = 0. \quad (2.67)$$

Esta formulação admite uma solução única e não necessita de calibre.

Região não Condutora: ($\sigma = 0$)

Nessas regiões, o problema se reduz à resolução da equação (2.58) que pode ser feita utilizando uma formulação em potencial escalar tal como (2.52):

$$\text{div}(\mu(\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi) + \mathbf{b}_r) = 0. \quad (2.68)$$

Note que ϕ pode ser multivalor quando Ω_c^C é multiplamente conexo, em tal caso cortes devem ser definidos para tornar este domínio simplesmente conexo [23].

A formulação em campo magnético, caracterizada pelas equações (2.67) e (2.68), é chamada formulação $\mathbf{h} - \phi$. A fim de acoplar as regiões condutoras e não condutoras, é preciso assegurar as condições de transmissão dos campos [45] [46].

2.7.2.2 Formulação conforme em \mathbf{b} – formulação $\mathbf{a} - v$:

A equação (2.58) implica na existência de um potencial vetor magnético \mathbf{a} , tal que:

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} . \quad (2.69)$$

Aplicando-se em (2.57), tem-se:

$$\text{rot}(\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) = 0 , \quad (2.70)$$

o que resulta em

$$\mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a} - \text{grad } v , \quad (2.71)$$

onde v é um potencial escalar elétrico.

A combinação desta relação com as equações (2.56), (2.59), (2.60) e (2.69) gera:

$$\text{rot}(v \text{rot } \mathbf{a}) = -\sigma(\partial_t \mathbf{a} + \text{grad } v) + \text{rot}(v \mathbf{b}_r) . \quad (2.72)$$

Impondo a conservação de corrente ($\text{div } \mathbf{j} = 0$), obtém-se uma equação suplementar:

$$\text{div } \sigma(\partial_t \mathbf{a} + \text{grad } v) = 0 . \quad (2.73)$$

Nota-se que esta equação está implícita em (2.72) [35] [46].

Esta formulação utiliza o potencial vetor magnético \mathbf{a} em todo o domínio e o potencial escalar elétrico v nas regiões condutoras.

A continuidade da componente tangencial de \mathbf{a} assegura a continuidade da componente normal de \mathbf{b} . A continuidade da componente tangencial de \mathbf{h} está implícita na equação (2.72). De acordo com a relação (2.71), a continuidade do potencial v e da componente tangencial de \mathbf{a} assegura a continuidade da componente tangencial de \mathbf{e} . A continuidade da componente normal de \mathbf{j} está implícita na equação (2.73) [46].

Como na magnetostática em potencial vetor, é preciso assegurar a unicidade da solução. As equações $\text{div } \mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ constituem então as condições de calibres possíveis [19] [21]. Neste trabalho será utilizado o calibre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$, cuja implementação consiste em anular a circulação de \mathbf{a} ao longo de todas as arestas de uma árvore definida no domínio de estudo [20] [46] [52].

2.8 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Nos parágrafos anteriores, apresentou-se uma formulação contínua dos problemas magnetostáticos e magnetodinâmicos sob forma de equações diferenciais de derivadas parciais. Essas equações regem a distribuição dos campos vetoriais ou das funções escalares.

A resolução de tais equações nem sempre pode ser obtida analiticamente e a utilização de métodos numéricos torna-se necessária para se obter uma solução aproximada do problema. O papel dos métodos numéricos é de substituir a formulação contínua por uma formulação discreta [35].

Para discretizar as formulações magnetostáticas e magnetodinâmicas, conduzem-se as equações escritas de uma forma diferencial para uma forma integral, a qual se adapta melhor a discretização pelo método de elementos finitos. Este método consiste em realizar uma malha na estrutura estudada e interpolar as incógnitas sob os elementos dessa malha [4].

Nas formulações apresentadas anteriormente, considera-se o problema de derivadas parciais da seguinte forma [35] [46],

$$Lu = f \text{ em } \Omega, \quad Bu = g \text{ em } \Gamma, \quad (2.74a - b)$$

onde L é um operador diferencial de ordem n , B é um operador que define uma condição sobre Γ , f e g são funções respectivamente definidas sobre Ω e $\partial\Omega$.

Essa apresentação do problema constitui uma formulação cuja resolução direta é freqüentemente difícil, visto a ordem elevada das derivações e o caráter descontínuo das variáveis consideradas. Uma função u que verifica esse problema é chamada solução forte.

Uma formulação fraca do problema (2.74) é definida como sendo da forma [35] [46]

$$(u, L^* v) - (f, v) + \int_{\Gamma} Q_g(v) ds = 0, \quad \forall v \in V(\Omega), \quad (2.75)$$

onde L^* é o operador adjunto de L e é definido pela fórmula de Green apresentada no item 2.5, Q_g é uma forma linear em v que depende de g , e o espaço $V(\Omega)$ é um espaço de funções testes (que é preciso definir em relação com L^*). Uma função u que satisfaça a equação (2.75) para toda função teste $v \in V(\Omega)$ é chamada solução fraca [46].

A vantagem da formulação fraca, em relação à formulação forte, é a diminuição do grau de derivação das equações e a consideração direta de certas condições de contorno [35].

No método de elementos finitos o domínio de estudo Ω é dado por um conjunto de elementos geométricos de forma simples. Esse processo de discretização do espaço é chamado malha. Um elemento finito é então definido por sua forma geométrica e as funções de base ou de aproximação que lhe são associadas.

Em geometria 3D, os elementos da malha podem ser tetraedros, hexaedros e prismas [53]. Em 2D, os elementos são triângulos e quadriláteros. Sobre cada elemento, as incógnitas do problema são discretizadas por uma combinação de funções de aproximação. Uma tal combinação pode ser feita sobre os nós, as arestas, as faces e o volume do elemento. O uso dessas funções permite interpolar o valor da incógnita em todo ponto do domínio estudado.

2.8.1 Funções de base ou de aproximação nodais:

Sobre cada elemento, a variável escalar ϕ é dada por uma combinação dos valores ϕ_j dos nós, tal que [46]

$$\phi = \sum_{j \in N} \phi_j s_j, \quad (2.76)$$

onde N é o conjunto dos nós de Ω , ϕ_j é o valor da variável escalar no nó $j \in N$ e s_j é a função de base associada ao nó $j \in N$ (veja Figura 2.8).

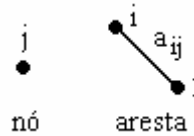


Figura 2.8 - Entidades geométricas: nó e aresta ($i, j \in N$).

A função de base s_j tem como propriedade ser igual a 1 para o nó j e vale 0 para os outros nós. As funções de base nodais asseguram a continuidade, através das faces, das variáveis utilizadas [46].

2.8.2 Funções de base ou de aproximação de aresta:

Quando a incógnita é vetorial, pode-se considerar uma aproximação sobre as arestas do elemento [54] [55] [56]. A variável vetorial \mathbf{a} pode ser expressa por

$$\mathbf{a} = \sum_{j \in A} a_j s_j, \quad (2.77)$$

onde A é o conjunto das arestas em Ω , a_j é a circulação de \mathbf{a} ao longo da aresta $j \in A$ e definida em (2.78), e s_j é a função de base associada à aresta $j \in A$.

$$a_j = \int_j \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}, \quad j \in A. \quad (2.78)$$

A função de base s_j tem a seguinte propriedade: a circulação de s_j é igual a 1 ao longo da aresta j e vale 0 ao longo das outras arestas [2] [3] [54] [55].

Para uma aresta $a_{ij} = \{i, j\}$, associa-se os campos de vetores [46]

$$s_{a_{ij}} = p_j \text{ grad} \sum_{r \in N_{F,j\bar{i}}} p_r - p_i \text{ grad} \sum_{r \in N_{F,i\bar{j}}} p_r, \quad (2.79)$$

onde $N_{F,m\bar{n}}$, $m, n \in N$ ($\{m, n\} = \{i, j\}$ ou $\{j, i\}$), é um conjunto de nós definidos como segue. Para um ponto de avaliação \mathbf{x} que pertence a um elemento geométrico adjacente a aresta a_{mn} , $N_{F,m\bar{n}}$ é o conjunto dos nós da face que pertence a esse elemento e que compreende o nó m mas não o nó n . Uma tal face é definida de forma única pelos elementos que tem três arestas na saída de cada nó [46].

As funções de base de aresta asseguram a continuidade da componente tangencial da variável vetorial \mathbf{a} e deixa livre sua componente normal [4] [7] [8] [54]. Esta propriedade é muito importante para discretizar os campos físicos e os potenciais vetores. Além disso, pode-se verificar a continuidade da componente normal do rotacional de \mathbf{a} .

A discretização da forma fraca implica em resolver um sistema de equações cujos graus de liberdade estão ligados ao número de nós e de arestas da malha. Para obter um tal sistema, deve-se escolher tanto as funções testes quanto às incógnitas geradas pela malha. Escolhendo as funções teste como sendo as funções de base ou de aproximação (nodais ou de aresta) tem-se o chamado **Método de Galerkin**, o qual é utilizado neste trabalho [4]. Sua aplicação à formulação fraca gera um sistema de equações algébricas cuja resolução dá uma solução aproximada do problema inicial.

2.9 DISCRETIZAÇÃO DAS FORMULAÇÕES

Neste item serão utilizadas as fórmulas de Green, apresentadas no item 2.5, para se obter as formulações fracas em magnetostática e magnetodinâmica.

2.9.1 Problema da magnetostática

2.9.1.1 Formulação em potencial escalar magnético

A forma fraca para o problema magnetostático descrito pelo potencial escalar magnético pode ser obtida da seguinte forma. Primeiramente, define-se o resíduo

$$r = \text{div} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi) + \mathbf{b}_r), \quad (2.80)$$

em cada subdomínio regular de Ω . Multiplica-se r por uma função escalar de teste $\phi' \in F_h^0$, suficientemente regular. Aplicando-se a fórmula de Green do tipo $\text{div} - \text{grad}$ (item 2.5) a esse produto, onde faz-se $\mathbf{u} = \mathbf{b} = \mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi) + \mathbf{b}_r$ e $v = \phi'$, tem-se [45]

$$-(\mu \text{grad } \phi, \text{grad } \phi')_{\Omega} + (\mu \mathbf{h}_s, \text{grad } \phi')_{\Omega} + (\mathbf{b}_r, \text{grad } \phi')_{\Omega} - \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma} = 0, \forall \phi' \in F_h^0. \quad (2.81)$$

Analisando a integral de superfície, tem-se que a mesma pode ser escrita como [46],

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma_h} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma_b}, \quad (2.82)$$

pois $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$ (veja Figura 2.1). Como a função teste $\phi' \in F_h^0$, tem-se $\phi'|_{\Gamma_h} = 0$ e então o primeiro termo do lado direito se anula. O segundo termo desse lado é uma condição de contorno natural de dois tipos. Ou ela pode ser nula pois $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0$ (item 2.5), ou pode estar associada às quantidades globais do tipo fluxo magnético sobre uma superfície pertencente a Γ_b onde ϕ é um potencial flutuante [23] [57] [58] [59] [60]. Para o caso onde ela se anula, a equação (2.81) torna-se:

$$-(\mu \text{grad } \phi, \text{grad } \phi')_{\Omega} + (\mu \mathbf{h}_s, \text{grad } \phi')_{\Omega} + (\mathbf{b}_r, \text{grad } \phi')_{\Omega} = 0, \forall \phi' \in F_h^0. \quad (2.83)$$

O potencial escalar pode ser expresso na forma discreta como [46],

$$\phi = \sum_{j \in N} \phi_j s_j, \quad (2.84)$$

onde N é o conjunto dos nós de Ω , s_j é a função de base nodal associada ao nó $j \in N$ e ϕ_j é o valor do potencial de reação do nó $j \in N$.

O gradiente da equação (2.72) é dado por [46]

$$\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi = \sum_{j \in N} \phi_j (-\text{grad } s_j) = \sum_{j \in N} \phi_j \mathbf{v}_j, \quad (2.85)$$

onde

$$\mathbf{v}_j = -\text{grad } s_j, \quad j \in N. \quad (2.86)$$

O campo fonte pode ser expresso na forma discreta como

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A} h_{s,j} \mathbf{s}_j. \quad (2.87)$$

A equação (2.87) pode ser escrita como uma combinação linear das funções de base [46] [50], isto é,

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A_s} h_{s,j} \mathbf{s}_j + \sum_{j \in N_s^C} \phi_{s,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_s} I_{s,j} \mathbf{c}_j, \quad (2.88)$$

onde ϕ_s é o potencial fonte associado a \mathbf{h}_s ; A_s é o conjunto das arestas internas ao domínio Ω_s ; N_s^C é o conjunto dos nós de Ω_s^C e de sua fronteira $\partial\Omega_s^C$; C_s é o conjunto dos cortes fontes de Ω_s^C , associados ao potencial ϕ_s e caracterizados pelas descontinuidades $I_{s,j}$, $\forall j \in C_s$. Neste caso Ω_s^C é a parte complementar do domínio Ω_s .

O suporte de \mathbf{h}_s é limitado aos indutores e a vizinhança dos cortes associados. A equação (2.88) será mais bem explicada no item 2.9.2.2.

2.9.1.2 Formulação em potencial vetor magnético

A forma fraca para a formulação em potencial vetor magnético é obtida a seguir. Primeiramente, define-se o resíduo vetorial

$$\mathbf{r} = \text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{a}) - \mathbf{j} - \text{rot}(\nu \mathbf{b}_r), \quad (2.89)$$

em cada subdomínio regular Ω . Efetua-se o produto escalar de \mathbf{r} por uma função teste vetorial $\mathbf{a}' \in F_b^1$ suficientemente regular. Utilizando-se, então, a fórmula de Green do tipo $\text{rot} - \text{rot}$ (item 2.5) a esse produto, onde faz-se $\mathbf{u} = \mathbf{h} = \nu \text{rot } \mathbf{a} - \nu \mathbf{b}_r$ e $\nu = \mathbf{a}'$, tem-se [45]:

$$(\nu \text{rot } \mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{a}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{b}_r, \text{rot } \mathbf{a}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = (\mathbf{j}, \mathbf{a}')_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_b^1, \quad (2.90)$$

O termo da integral de superfície pode ser reescrito como [46],

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{h} \times \mathbf{a}', \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} = - \langle \mathbf{n} \times \mathbf{a}', \mathbf{h} \rangle_{\Gamma}. \quad (2.91)$$

Além disso, este termo pode ser decomposto em

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma_h} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma_b}, \quad (2.92)$$

pois $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$ (veja Figura 2.1).

Aplicando-se (2.91) em (2.92), tem-se:

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma_h} - \langle \mathbf{n} \times \mathbf{a}', \mathbf{h} \rangle_{\Gamma_b}. \quad (2.93)$$

Como a função teste vetorial $\mathbf{a}' \in F_b^1$, tem-se $\mathbf{n} \times \mathbf{a}'|_{\Gamma_b} = 0$ e o segundo termo do lado direito de (2.93) é nulo. O primeiro termo desse lado é uma condição de contorno natural. Ela pode ser nula devido a condição de contorno $\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0$ (definido no item 2.5), ou pode estar associada às quantidades globais do tipo circulação, como por exemplo a força magnetomotriz (equação (2.27)) [59] [61].

Tomando a integral de superfície sobre Γ_h nula, a equação (2.90) torna-se

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{b}_r, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} = (\mathbf{j}, \mathbf{a}')_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_b^1, \quad (2.94)$$

A condição de calibre é implementada sobre uma árvore construída em Ω , de modo que a forma discreta do potencial vetor é dada por

$$\mathbf{a} = \sum_{j \in \tilde{A}} a_j \mathbf{s}_j, \quad (2.95)$$

onde \tilde{A} é o conjunto das arestas da co-árvore associada a árvore definida; \mathbf{s}_j é a função de base associada a aresta $j \in \tilde{A}$; a_j é a circulação de \mathbf{a} ao longo da aresta $j \in \tilde{A}$ [46].

2.9.2 Problema da magnetodinâmica

Nos problemas da magnetodinâmica serão considerados dois tipos de condutores nos dispositivos sob análise [42]:

- *Condutores espessos ou indutores maciços*: são os condutores que possuem dimensões, tais que, em relação às frequências dos fenômenos, apresentam o efeito pelicular.
- *Condutores ou indutores finos*: são os condutores que possuem dimensões suficientemente reduzidas de maneira que se pode considerar que a corrente é uniformemente distribuída sobre sua seção transversal.

A parte condutora apresentando correntes de Foucault de Ω é denotada Ω_c e a parte não condutora Ω_c^C , com $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_c^C$.

Neste capítulo serão estudados os condutores maciços e no capítulo seguinte os indutores finos.

2.9.2.1 Formulação conforme em \mathbf{b} – formulação $\mathbf{a} - v$

Tomando o mesmo procedimento da magnetostática, ou seja, definindo-se o resíduo vetorial da equação (2.72), multiplicando-o por uma função teste vetorial $\mathbf{a}' \in F_a$, obtém-se a forma fraca da formulação magnetodinâmica $\mathbf{a} - v$ [61]:

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{b}_r, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} + (\sigma \partial_t \mathbf{a}, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + (\sigma \operatorname{grad} v, \mathbf{a}')_{\Omega_c} - (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} = 0, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_a(\Omega) \quad (2.96)$$

onde $F_a(\Omega)$ é o espaço funcional definido em Ω e contendo as funções de base para \mathbf{a} , bem como as funções de teste \mathbf{a}' .

Como na magnetostática, o termo da integral de superfície $\langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma}$ é nulo pois $\mathbf{n} \times \mathbf{a}'|_{\Gamma_b} = 0$ e $\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0$. Assim, a equação (2.96) torna-se:

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{b}_r, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} + (\sigma \partial_t \mathbf{a}, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + (\sigma \operatorname{grad} v, \mathbf{a}')_{\Omega_c} - (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} = 0, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_a(\Omega). \quad (2.97)$$

Para se obter as relações de circuito associadas com o indutor maciço i , procede-se da seguinte forma. Primeiramente, define-se a forma fraca da equação (2.73), ou seja, toma-se o resíduo

$$r = \operatorname{div} \sigma (\partial_t \mathbf{a} + \operatorname{grad} v). \quad (2.98)$$

Multiplicando-se esse resíduo por uma função escalar $v' \in F_v(\Omega_c)$ e aplicando-se a fórmula de Green do tipo $\operatorname{grad} - \operatorname{div}$ (item 2.5) tem-se a seguinte forma fraca

$$(\sigma \partial_t \mathbf{a}, \operatorname{grad} v')_{\Omega_c} + (\sigma \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v')_{\Omega_c} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v' \rangle_{\Gamma_j}, \quad \forall v' \in F_v(\Omega_c), \quad (2.99)$$

onde Γ_j é a parte da fronteira de Ω_c que é atravessada por uma corrente. Observa-se que neste caso a integral de superfície não foi anulada como nos casos anteriores, pois agora a mesma será associada a uma quantidade global (equação (2.24)) [59] [61].

$F_a(\Omega)$ é um espaço funcional de elementos finitos de aresta construído sobre uma malha de Ω e associado com uma condição de calibre. $F_v(\Omega_c)$ é um espaço funcional de elementos finitos nodais, com a relação $\operatorname{grad} F_v(\Omega_c) \subset F_a(\Omega)$. Conseqüentemente, a resolução de (2.97) pode ser decomposta em dois problemas sucessivos [61].

O primeiro problema consiste no cálculo, para cada indutor i , de um potencial escalar elétrico unitário fonte v_o^i (também denotado v_o) de maneira a definir a tensão v em Γ_j por [61]:

$$v = \sum_{i \in \Gamma_j} V_i v_o^i, \quad (2.100)$$

sendo V_i o valor da tensão a ser imposta.

O cálculo de potencial v_o pode ser feito usando uma formulação de elementos finitos de eletrocinética ou por uma soma de funções de base nodais s_n de todos os nós localizados sobre a seção transversal (Figura 2.9), notada s_i para seção Γ_i , isto é [61],

$$v_o = s^i = \sum_{n \in \Gamma_j^i} s_n, \quad (2.101)$$

com um suporte limitado a camada de transição. Esta função s_i é igual a 1, a tensão unitária, sobre Γ_j^i . Assim, a região de fonte fina na Figura 2.4 não precisa ser definida na malha. Somente uma de suas superfícies é explicitamente considerada, como uma seção transversal onde v_o é descontínuo.

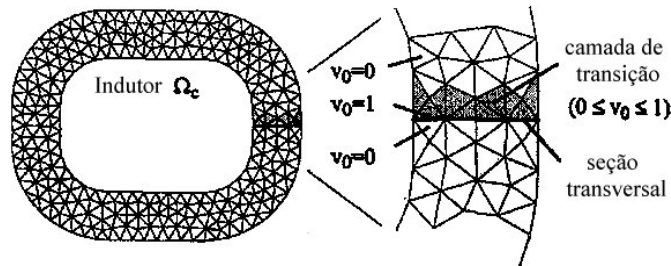


Figura 2.9 - Seção transversal e sua camada de transição associada ao indutor.

Conhecendo v_o , dado por (2.101), e usando (2.100), o segundo problema consiste em resolver (2.97), cujas incógnitas são o potencial vetor \mathbf{a}' em Ω e a tensão V_i de cada indutor, isto é [61],

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{b}_r, \operatorname{rot} \mathbf{a}')_{\Omega} + (\sigma \partial_t \mathbf{a}, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + \sum_{i \in \Gamma_j} V_i (\sigma \operatorname{grad} v_o^i, \mathbf{a}')_{\Omega_c} = 0, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_a(\Omega) \quad (2.102)$$

A tensão associada com a região condutora aparece explicitamente nas equações como uma quantidade global definida no sentido forte. No entanto, a corrente total fluindo no condutor maciço pode somente ser expressa no sentido fraco, pois vem da equação de Ampère a qual é expressa na

forma fraca [61] [62] [63]. A corrente I_i através da seção Γ_j^i de um indutor pode ser obtida de (2.99) com v' igual a função global definida anteriormente (2.101). Na verdade, com $v' = s_i$, o termo da integral de superfície em (2.99) torna-se [61]:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, s_i^i \rangle_{\Gamma_j^i} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, 1 \rangle_{\Gamma_j^i} = \int_{\Gamma_j^i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, ds = I_i, \quad (2.103)$$

e assim (2.99) torna-se,

$$I_i = (\sigma \partial_t \mathbf{a}, \text{grad } s_i^i)_{\Omega_c} + (\sigma \text{ grad } v, \text{grad } s_i^i)_{\Omega_c}, \quad (2.104)$$

ou, com $v = V_i v_o^i = V_i s_i^i$,

$$I_i = (\sigma \partial_t \mathbf{a}, \text{grad } s_i^i)_{\Omega_c} + V_i (\sigma \text{ grad } s_i^i, \text{grad } s_i^i)_{\Omega_c}. \quad (2.105)$$

A equação (2.105) é a relação de circuito associada com o indutor maciço i , isto é, uma relação entre a tensão V_i e sua corrente I_i [61] [62] [63].

Desse modo, a corrente é obtida através de uma integração volumétrica em uma camada de transição localizada em um lado da seção transversal (Figura 2.9, pois o suporte de s_i é reduzido para esta camada em Ω_c) e não mais através de uma integração superficial numérica de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{n} \cdot \sigma \mathbf{e}$ sobre esta seção. A integração superficial seria afetada pela escolha da superfície de integração [59].

A forma discreta do potencial vetor é a mesma da equação (2.95).

2.9.2.2 Formulação conforme em \mathbf{h} – formulação $\mathbf{h} - \phi$:

A expressão geral do campo magnético \mathbf{h} em Ω na formulação \mathbf{h} é [57] [62]

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_r - \text{grad } \phi. \quad (2.106)$$

O campo \mathbf{h}_s é um campo magnético fonte associado com a densidade de corrente imposta \mathbf{j}_s nos indutores finos Ω_s através da equação

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s. \quad (2.107)$$

O campo \mathbf{h}_r é o campo de reação associado as regiões condutoras Ω_c enquanto ϕ é o potencial escalar magnético de reação associado as regiões não condutoras Ω_c^C .

Note que ϕ pode ser multivalor quando Ω_c^C é multiplamente conexo, nos quais cortes devem ser definidos para tornar estes domínios simplesmente conexos [46].

A formulação magnetodinâmica $\mathbf{h}-\phi$ é um exemplo de formulação \mathbf{h} . Para obter sua forma fraca geral, procede-se da seguinte forma. Primeiramente, obtêm-se as formas fracas das regiões condutoras (equação (2.67)) e não condutoras (equação (2.68)) como feito anteriormente. Somando-se estas duas expressões, encontra-se a forma fraca geral dada por

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega} + \partial_t (\mathbf{b}_r, \mathbf{h}')_{\Omega} + (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \mathbf{j}_s, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_s} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{e}_s, \mathbf{h}' \rangle_{\Gamma_e} = 0, \\ \forall \mathbf{h}' \in F_{h\phi}(\Omega), \quad (2.108)$$

onde $F_{h\phi}(\Omega)$ é um espaço de função definido sobre Ω e contendo as funções bases para \mathbf{h} (acoplado a ϕ), bem como para as funções testes $\mathbf{h}' = \mathbf{h}'_r - \text{grad } \phi'$.

O segundo termo de (2.108) representa o efeito dos ímãs permanentes. A indução remanente \mathbf{b}_r é somente considerada no cálculo inicial do problema magnetodinâmico, pois sua derivada em relação ao tempo é nula nos passos de tempo subsequentes.

A expressão $\mathbf{n} \times \mathbf{e}_s$ é uma condição de fronteira natural sobre as fronteiras Γ_e de dois tipos. Ou, ela pode ser especificada localmente, por exemplo devido a $\mathbf{n} \times \mathbf{e} \big|_{\Gamma_e} = 0$, ou pode ser um campo para o qual somente as quantidades globais associadas são conhecidas, isto é, tensões através da equação (2.26) [46] [59].

Indutores maciços conduzindo correntes podem ser diretamente considerados através da expressão do campo de reação $\mathbf{h}_r - \text{grad } \phi$ em (2.106). Para isso, a circulação $\mathbf{h}_r - \text{grad } \phi$ ao longo de qualquer caminho fechado C_i ao redor de cada indutor maciço i tem de ser igual a sua corrente I_i [62], isto é,

$$\oint_{C_i} (\mathbf{h}_r - \text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{l} = I_i. \quad (2.109)$$

A relação (2.109) implica que existe para cada indutor uma função base de \mathbf{h} (chamada função base de corrente e denotada \mathbf{c}_i) associada com sua corrente e com a propriedade de ter uma circulação unitária ao longo de qualquer caminho fechado C_i ao redor do indutor [62]. Uma forma discreta para tal função de base será definida em seguida. O que pode ser conhecido no nível contínuo é que a função \mathbf{c}_i pode ser expressa como o gradiente de um potencial escalar, isto é, $\mathbf{c}_i = -\text{grad } q_i$ [50] [57] [62], este potencial sendo definido no domínio Ω_c^C simplesmente conexo.

A integral de superfície em (2.108), para \mathbf{h}' igual a função base de corrente \mathbf{c}_i , com Γ_e a fronteira lateral de Ω_{fem} , i simplesmente conexo [57] [59],

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{e}_s, \mathbf{c}_i \rangle_{\Gamma_e} = \oint_{\gamma_i} \mathbf{e}_s \cdot d\mathbf{l} = V_i. \quad (2.110)$$

Conseqüentemente, para a função teste $\mathbf{h}' = \mathbf{c}_i$, (2.108) torna-se

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{c}_i)_{\Omega} + \partial_t (\mathbf{b}_r, \mathbf{c}_i)_{\Omega} + (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{c}_i)_{\Omega_c} = -V_i, \quad (2.111)$$

a qual é uma relação de circuito na forma fraca para o indutor maciço i [50].

O campo \mathbf{h} pode ser expresso na forma discreta como sendo [46],

$$\mathbf{h} = \sum_{j \in A} h_j \mathbf{s}_j, \quad (2.112)$$

De modo que os campos fontes e de reação podem ser escritos como [46],

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A} h_{s,j} \mathbf{s}_j, \quad \mathbf{h}_r = \sum_{j \in A} h_{r,j} \mathbf{s}_j. \quad (2.113)$$

2.9.2.2.1 Considerando domínio simplesmente conexo:

Para tratar regiões com dois tipos de domínios como por exemplo o da Figura 2.10, torna-se necessário alterar a equação (2.112) para que a mesma defina explicitamente o acoplamento entre o campo \mathbf{h} e o potencial escalar ϕ .

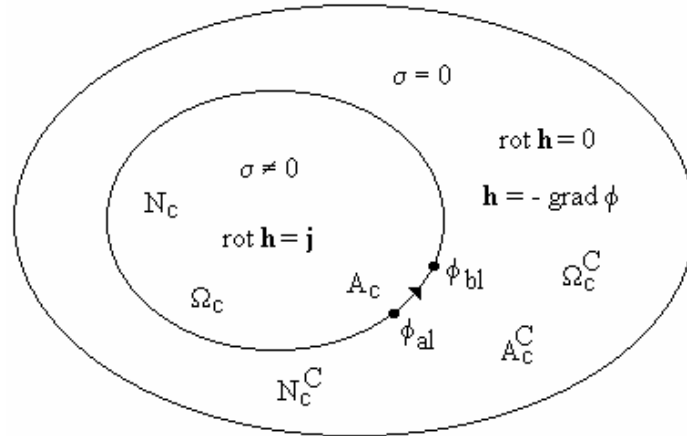


Figura 2.10 - Domínio de estudo (conexo).

Primeiramente, definem-se dois conjuntos complementares das arestas de Ω :

- conjunto A_c que é composto pelas arestas internas ao domínio Ω_c ;
- conjunto A_c^C que é composto pelas arestas internas de Ω_c^C , bem como das arestas localizadas na fronteira de Ω_c^C .

Definem-se, também, dois subconjuntos complementares de nós:

- N_c que é o conjunto dos nós dentro de Ω_c ;
- N_c^C que é o conjunto de nós dentro de Ω_c^C e sobre sua fronteira $\partial\Omega_c^C$.

A equação (2.112) pode então ser decomposta como [46] [50]

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{l \in A_c^C} h_l \mathbf{s}_l. \quad (2.114)$$

Sendo Ω_c^C simplesmente conexo e onde $\text{rot } \mathbf{h} = 0$, tem-se que \mathbf{h} pode ser derivado de um potencial escalar ϕ [50], isto é,

$$\mathbf{h} = -\text{grad } \phi \text{ em } \Omega_c^C. \quad (2.115)$$

Assim, h_l pode ser definido como (observe a Figura 2.10),

$$h_l = \int_{l_{ab}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_{ab}} -\text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi_{al} - \phi_{bl}, \quad (2.116)$$

para qualquer aresta $l_{ab} \in A_c^C$, a_l e b_l sendo seus nós de origem e de extremidade respectivamente. A expressão (2.114) se torna então,

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{l \in A_c^C} (\phi_{al} - \phi_{bl}) \mathbf{s}_l. \quad (2.117)$$

Agrupando os termos com ϕ_n em (2.114), tem-se

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{n \in N_c^C} \phi_n \mathbf{v}_n, \quad (2.118)$$

onde é estabelecido que [50]

$$\mathbf{v}_n = \sum_{n_j \in A_c^C} \mathbf{s}_{n_j}. \quad (2.119)$$

Devido às propriedades entre os espaços dos elementos nodais e de aresta [3] [52] [53], verifica-se que \mathbf{v}_n pode ser simplificado por [50],

$$\mathbf{v}_n = -\text{grad } s_n \text{ em } \Omega_c^C, \quad (2.120)$$

onde s_n é a função de forma nodal associada ao nó n .

2.9.2.2.2 Considerando domínio multiplamente conexo:

Um domínio multiplamente conexo Ω_c^C pode tornar-se simplesmente conexo pela definição de alguns cortes [23] [50]. Como anteriormente, pode-se definir um potencial escalar do qual h pode ser derivado e se deve acrescentar um termo na equação (2.118) para que a mesma apresente de forma explícita as restrições relativas aos cortes.

Seja C o conjunto dos cortes Γ_{eci} , $\forall i \in C$, de Ω_c^C , e N_{eci} o conjunto dos nós de Γ_{eci} . O potencial ϕ pode ser decomposto em duas partes, $\phi^{cont} + \phi^{desc}$, onde ϕ^{cont} é contínuo no domínio multiplamente conexo Ω_c^C e o ϕ^{desc} é descontínuo através dos cortes. Assim, ϕ sofre descontinuidades na parte complementar de Ω_c^C , isto é em Ω_c . Essas descontinuidades são levadas em conta por ϕ^{desc} e podem ser expressas por [50]

$$\phi^{desc} = \sum_{i \in C} I_i q_i, \quad (2.121)$$

onde I_i é a descontinuidade associada com o corte Γ_{eci} , e q_i é uma função escalar definida em Ω_c^C , a qual sofre uma descontinuidade unitária através do corte Γ_{eci} .

A função q_i tem propriedades definidas [50]. Fixa-se o valor de q_i em 1 em qualquer ponto sobre um lado do corte, chamado lado '+', e 0 no outro lado, chamado lado '-'. Pode-se, então, escolher executar a transição de q_i entre estes valores na camada de elementos geométricos da malha de Ω_c^C adjacente ao lado '+'. A função q_i será cancelada através das faces as quais permitem sair da camada de transição, conforme Figura 2.11. Se ϕ^+ e ϕ^- denotam os traços de ϕ nos lados '+' e '-' dos cortes, descende de Γ_{eci} que [50]

$$\phi^+ - \phi^- \stackrel{def}{=} \phi|_{\Gamma_{eci}^+} - \phi|_{\Gamma_{eci}^-} \stackrel{def}{=} [\phi]_{\Gamma_{eci}} = I_i, \quad (2.122)$$

e, de acordo com a forma dada para q_i , tem-se

$$\phi^+ = \phi_{cont} + I_i, \quad \phi^- = \phi_{cont}. \quad (2.123-2.124)$$

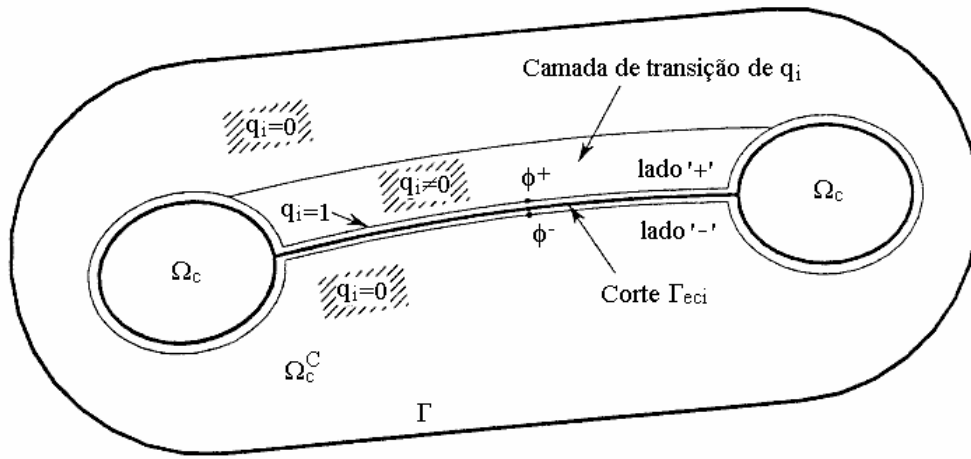


Figura 2.11 - Corte, camada de transição associada e função q_i .

Em termos dos valores nodais do potencial, pode ser visto que as descontinuidades I_i , $\forall i \in C$, estão somente associadas com potenciais nodais nos lados '+', e assim que ϕ_n é equivalente a ϕ_n^{cont} para qualquer outro nó n [50]. Então,

$$\phi_n^+ = \phi_n^{cont} + I_i, \quad \forall n \in N_{eci}, \quad \forall i \in C,$$

$$\phi_n^- = \phi_n^{cont}, \quad \forall n \in N_{ec},$$

$$\phi_n = \phi_n^{cont}, \quad \forall n \in N_c^C \setminus N_{ec}.$$

A equação (2.118) torna-se então

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{n \in N_c^C} \phi_n^{cont} \mathbf{v}_n + \sum_{i \in C} I_i \mathbf{c}_i, \quad (2.125)$$

onde \mathbf{c}_i é definido abaixo para o corte Γ_{eci} [50]. Seu domínio de valor não nulo, chamado seu suporte, é composto da camada de transição em Ω_c^C e dos elementos geométricos de Ω_c os quais estão adjacentes a esta camada por uma aresta de fronteira incidente a fronteira $\partial \Gamma_{eci}$. Na verdade, esta função resulta da soma das funções, chamada \mathbf{v}_n^+ , associadas com os nós de N_{eci} [50],

$$\mathbf{c}_i = \sum_{n \in N_{eci}} \mathbf{v}_n^+. \quad (2.126)$$

Na camada de transição em Ω_c^C , tem-se que

$$\mathbf{v}_n^+ = \mathbf{v}_n = -\text{grad } s_n, \quad (2.127)$$

o suporte definido deixando ϕ_n^+ ser levado em conta somente no lado '+'. Nos elementos adjacentes em Ω_c , a expressão de \mathbf{v}_n^+ é dada por:

$$\mathbf{v}_n = \sum_{\substack{n \in A_c^C \\ \text{com } j \in N_{c+}^C \\ j \notin N_{eci}}} s_{nj}, \quad (2.128)$$

onde N_{c+}^C é o conjunto dos nós da camada de transição [50]. Isto procede do fato que somente as arestas da fronteira incidente no nó n e localizados no lado '+' são levadas em conta para considerar a contribuição da descontinuidade I_i em Ω_c . Este \mathbf{v}_n^+ é então justamente uma parte reduzida de \mathbf{v}_n dada por (2.119).

Devido às propriedades entre os espaços dos elementos nodais e de aresta, a função \mathbf{c}_i pode também ser expressa em toda região como sendo [50],

$$\mathbf{c}_i = \sum_{\substack{nj \in A_c^C \text{ (soma para as arestas de } \Omega_c^C) \\ n \in N_{eci} \text{ (...partindo do nó sobre o corte...) } \\ j \in N_{c+}^C \text{ (...cuja extremidade está no lado '+'...) } \\ j \notin N_{eci} \text{ (...mas não sobre aquele corte...)}}} s_{nj}. \quad (2.129)$$

A base de \mathbf{h} aparece explicitamente em (2.125). É gerada pelas funções de aresta s_k , $k \in A_c$, funções nodais \mathbf{v}_n , $n \in N_c^C$, e as funções corte \mathbf{c}_i , $i \in C$, respectivamente relativa aos domínios condutores, não condutores e multiplamente conexos. Os coeficientes h_k , ϕ_n^{cont} e I_i são os graus de liberdade associados [46] [50].

Desse modo, o campo de reação pode também ser expresso sob a forma geral seguinte [46]:

$$\mathbf{h}_r = \sum_{j \in A_c} h_{r,j} s_j + \sum_{j \in N_c^C} \phi_{r,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_r} I_{r,j} \mathbf{c}_j, \quad (2.130)$$

onde ϕ_r é o potencial de reação, associado a \mathbf{h}_r ; A_c é o conjunto das arestas internas ao domínio Ω_c ; N_c^C é o conjunto dos nós de Ω_c^C e de sua fronteira $\partial\Omega_c^C$; C_r é o conjunto dos cortes de Ω_c^C , ditos de reação, associados ao potencial ϕ_r e caracterizados pelas descontinuidades $I_{r,j}$, $\forall j \in C_r$.

Da mesma forma, o campo fonte pode ser escrito como sendo [46],

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A_s} h_{s,j} \mathbf{s}_j + \sum_{j \in N_s^C} \phi_{s,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_s} I_{s,j} \mathbf{c}_j, \quad (2.131)$$

onde ϕ_s é o potencial de reação, associado a \mathbf{h}_s ; A_s é o conjunto das arestas internas ao domínio Ω_s ; N_s^C é o conjunto dos nós de Ω_s^C e de sua fronteira $\partial\Omega_s^C$; C_s é o conjunto dos cortes de Ω_s^C associados ao potencial ϕ_s e caracterizados pelas descontinuidades $I_{s,j}$, $\forall j \in C_s$, onde $I_{s,j}$ está diretamente ligado a uma corrente elétrica.

2.10 PRÉ-CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO FONTE

O suporte do campo magnético fonte \mathbf{h}_s é limitado ao indutor Ω_s e a uma camada de transição associada com os cortes. Note que o modo com o qual este campo fonte é definido (\mathbf{h}_s é igual a zero em quase todo lugar nas regiões não condutoras) conduz a uma maneira elegante de reduzir o erro de cancelamento nos materiais magnéticos [48].

O campo fonte \mathbf{h}_s pode ser determinado por dois métodos:

1. Um método consiste em resolver um problema eletrocinético com uma condutividade tensorial tendo um valor principal ao longo do condutor do indutor, isto é,

$$(\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}_s, \text{rot } \mathbf{h}'_s)_{\Omega_s} = 0. \quad (2.132)$$

2. O outro método consiste em calcular \mathbf{h}_s através de um método de projeção de uma distribuição conhecida de \mathbf{j}_s [48], isto é,

$$(\text{rot } \mathbf{h}_s, \text{rot } \mathbf{h}'_s)_{\Omega_s} = (\mathbf{j}_s, \text{rot } \mathbf{h}'_s)_{\Omega_s}. \quad (2.133)$$

Esta abordagem também pode ser aplicada se a densidade de corrente fonte \mathbf{j}_s não é dada analiticamente, mas resulta de um cálculo anterior [48].

Em ambos os casos, o coeficiente da função de base do corte é diretamente dado pela força magnetomotriz da corrente fixada [48].

2.11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentaram-se as equações de Maxwell e as formulações nas quais serão implementadas as condições de periodicidade ou anti-periodicidade necessárias à operacionalização da banda de movimento. Foram estudadas suas formas fortes e fracas. Esses modelos podem ser estudados inserindo outras variáveis (ferramentas matemáticas), como por exemplo, os potenciais escalares e vetoriais. A noção de potencial é muito interessante, pois ela permite tornar implícita uma das equações a resolver. Assim, o campo físico é ligado ao potencial por uma operação de derivação ou integração. Entretanto, a utilização desses potenciais acarreta em certas dificuldades, como o problema das regiões não simplesmente conexas para o potencial escalar ou a definição de uma condição de calibre para o potencial vetor.

Para a magnetodinâmica, também, apresentou-se uma técnica para considerar as quantidades globais obtidas diretamente da forma fraca.

CAPÍTULO 3

ACOPLAMENTO COM CIRCUITOS EXTERNOS E MÉTODO PARA LEVAR EM CONTA O MOVIMENTO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o acoplamento entre as equações magnéticas e elétricas nas formulações em potenciais escalares e vetoriais descritas no capítulo anterior. Em seguida será apresentado um método para definir as condições de periodicidade para ambas as formulações. O final do capítulo é destinado à apresentação dos métodos para levar em conta o movimento.

3.2 ACOPLAMENTO ENTRE AS EQUAÇÕES DE CAMPO E A EQUAÇÃO DO CIRCUITO ELÉTRICO

Os dispositivos eletromagnéticos são geralmente conectados a circuitos elétricos, de modo que as correntes e tensões associadas aos dispositivos devem ser consideradas para o acoplamento com esses circuitos. Essas grandezas são quantidades globais, as quais são derivadas das quantidades locais, como os campos elétricos e magnéticos.

Neste trabalho, considera-se que os circuitos externos de alimentação estão conectados ao circuito magnético através de condutores ou indutores finos. No que concerne ao circuito elétrico do dispositivo magnético ele é limitado a uma malha contendo uma resistência R e uma fonte de tensão V . No entanto, é possível considerar circuitos constituídos de outros elementos lineares ou não. A equação desta malha é a seguinte [35] [42] [62].

$$V = R I + \partial_t \Psi, \quad (3.1)$$

onde Ψ representa o fluxo magnético concatenado na bobina.

Para resolver o problema do acoplamento das equações do campo e do circuito elétrico, vários métodos foram propostos [26] [32] [35] [44] [64] [65] [66] [67] [68] [69] [70]:

- A resolução separada das várias equações através de um cálculo das indutâncias;
- O método íntegro-diferencial que consiste em exprimir a corrente em função de uma integral da tensão;

- A resolução simultânea.

Este último método é o mais geral e adaptado para uma discretização do tipo elementos finitos [35]. Neste item será apresentado o acoplamento entre as equações do campo magnético e do circuito, para indutores finos, em ambas formulações magnetodinâmicas $\mathbf{h}-\phi$ e $\mathbf{a}-v$.

3.2.1 Formulação conforme em \mathbf{h} - formulação $\mathbf{h}-\phi$:

Para indutores finos, a restrição da uniformidade da densidade de corrente pode ser automaticamente satisfeita através de campos magnéticos fontes $\mathbf{h}_{s,i}$, cada um sendo associado com um indutor $i \in \Omega_s$ com uma corrente unitária, isto é, satisfazendo $\text{rot } \mathbf{h}_{s,i} = \mathbf{j}_{s,i}$, onde $\mathbf{j}_{s,i}$ é a densidade de corrente equivalente da corrente unitária fluindo nas N_i espiras do indutor [57] [62]. Então, o campo magnético fonte total \mathbf{h}_s pode ser expresso como

$$\mathbf{h}_s = \sum_{i \in \Omega_s} I_{s,i} \mathbf{h}_{s,i}, \quad \mathbf{h}_s \in F_{hs}(\Omega), \quad (3.2)$$

onde $I_{s,i}$ é a corrente fluindo no indutor fino i . A densidade de corrente fonte efetiva no indutor i é $\mathbf{j}_s = I_{s,i} \mathbf{j}_{s,i}$ [62]. Portanto, os campos magnéticos fontes \mathbf{h}_s dados por (3.2), tornam possível levar em conta os indutores finos conduzindo correntes através da formulação (2.108) [62].

No entanto, condutores submetidos à tensão precisam de ferramentas adicionais para serem tratados [62]. Para indutores finos, tais ferramentas são relativas a equação de Faraday aplicada ao enrolamento da bobina a qual pode ser escrita como uma relação de circuito relacionando a corrente I_i e a tensão V_i para cada indutor i , isto é,

$$V_i = R_i I_i + \partial_t \Psi_i, \quad (3.3)$$

onde R_i e Ψ_i são respectivamente, a resistência e o fluxo magnético concatenado da bobina.

Para a formulação \mathbf{h} , o tratamento dos indutores finos é similar ao tratamento dos indutores maciços, exceto que as funções de base do campo magnético fonte \mathbf{h}_s definidas em (3.2) (isto é, os campos magnéticos fontes unitários $\mathbf{h}_{s,i}$) são usadas como função teste \mathbf{h}' . Assim, a equação (2.108) torna-se [57] [62]:

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}_{s,i})_\Omega + \partial_t (\mathbf{b}_r, \mathbf{h}_{s,i})_\Omega + I_{s,i} (\sigma^{-1} \mathbf{j}_{s,i}, \text{rot } \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega_{s,i}} = -V_i, \quad (3.4)$$

a qual é a relação de circuito no sentido fraco para indutores finos i . Esta relação permite um cálculo natural do fluxo magnético total concatenado com todos os condutores do indutor em

perfeita concordância com a formulação fraca (2.108), sem a necessidade de qualquer fórmula integral suplementar [62].

Dessa forma, o fluxo magnético pode ser expresso como sendo

$$\Psi_i = (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega} + (\mathbf{b}_r, \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega}, \quad \text{para o indutor } i \in \Omega_s. \quad (3.5)$$

Como já dito anteriormente, existem vários métodos para o cálculo de $\mathbf{h}_{s,i}$ [50] [51]. Estes métodos diferem pelo modo que os campos fontes são aproximados, bem como pela extensão de seus domínios de definição. Em [50], apresenta-se um método para calcular o campo magnético fonte associado com indutores de forma qualquer e com baixo tempo de CPU.

3.2.2 Formulação conforme em \mathbf{b} - formulação $\mathbf{a} - v$:

Para um indutor fino, a relação de circuito não pode ser obtida de (2.105). No entanto, pode-se obtê-la a partir da equação (3.4) [62] [63]. Assim, o primeiro termo de (3.4) é integrado por partes para se obter:

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega} = \partial_t (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega} = \partial_t (\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega} + \partial_t \langle \mathbf{n} \times \mathbf{a}, \mathbf{h}_{s,i} \rangle_{\partial\Omega}. \quad (3.6)$$

Se a integral de superfície é nula (o qual é geralmente o caso), a equação (3.6) torna-se:

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}_{s,i})_{\Omega} = \partial_t (\mathbf{a}, \mathbf{j}_{s,i})_{\Omega} = \partial_t (\mathbf{a}, \mathbf{j}_{s,i})_{\Omega_{s,i}}, \quad (3.7)$$

onde o suporte de integração tem de ser reduzido ao indutor (este não é o caso para a formulação conforme em \mathbf{h} onde o domínio inteiro é considerado). Conseqüentemente, (3.4) torna-se:

$$\partial_t (\mathbf{a}, \mathbf{j}_{s,i})_{\Omega_{s,i}} + I_{s,i} (\sigma^{-1} \mathbf{j}_{s,i}, \mathbf{j}_{s,i})_{\Omega_{s,i}} = -V_i, \quad (3.8)$$

a qual é a relação de circuito associada com a formulação conforme em \mathbf{b} .

Diferentes expressões da densidade de corrente $\mathbf{j}_{s,i}$ podem ser consideradas, as quais conduzem a diferentes aproximações das distribuições dos enrolamentos. A forma mais usada para $\mathbf{j}_{s,i}$ é

$$\mathbf{j}_{s,i} = \frac{N_i}{S_i} \mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w} = \mathbf{w} I_{\text{unitário}}, \quad (3.9)$$

onde \mathbf{t} é um vetor unitário tangente a direção da bobina, $I_{\text{unitário}} = 1 \text{ A}$, S_i é a área superficial do indutor e \mathbf{w} é o vetor densidade de condutor. Assim, a densidade de corrente fonte efetiva no

indutor i é $\mathbf{j}_s = I_{s,i} \mathbf{j}_{s,i}$. Tomando tal forma, a equação (3.8) torna-se uma relação de circuito usada classicamente [62] [63]

$$\partial_t \int_{\Omega_s} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} d\Omega_s + R_i I_{s,i} = -V_i. \quad (3.10)$$

O fluxo magnético pode ser obtido igualando as equações (3.3) e (3.10). Assim, sua expressão é dada por [63]

$$\Psi_i = (\mathbf{a}, \mathbf{w})_{\Omega_s}. \quad (3.11)$$

A distribuição de $\mathbf{j}_{s,i}$ pode também ser calculada usando-se o potencial escalar fonte ou o potencial elétrico vetor [48]:

1. $\mathbf{j}_{s,i}$ pode ser calculada como o gradiente de um potencial escalar fonte $-\sigma \text{grad } v^o$ obtido da resolução de um problema eletrocinético com uma condutividade tensorial:

$$(\sigma \text{grad } v^o, \text{grad } v')_{\Omega_{s,i}} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s,i}, v' \rangle_{\Gamma_{g,i}}. \quad (3.12)$$

As fontes para este problema são as densidades de corrente uniforme (igual a N_i / S_i) sobre as fronteiras $\Gamma_{g,i}$ que são atravessadas por uma corrente. Outro modo para se obter uma forma similar para $\mathbf{j}_{s,i}$ é o uso de um método de projeção de uma distribuição conhecida \mathbf{j}^o :

$$(\sigma \text{grad } v^o, \text{grad } v')_{\Omega_{s,i}} = (\mathbf{j}^o, \text{grad } v')_{\Omega_{s,i}}. \quad (3.13)$$

2. $\mathbf{j}_{s,i}$ pode ser calculada como o *rot* de um potencial vetor elétrico tendo a mesma definição do campo magnético fonte usado na formulação conforme em \mathbf{h} , isto é, obtida resolvendo (2.132) ou (2.133) [48].

A escolha de um método particular não teria uma influência significativa sobre a distribuição da indução magnética nas partes principais do sistema. No entanto, ela pode influenciar a expressão do fluxo concatenado nos enrolamentos.

Com relação ao acoplamento das equações de campo e circuito, verificamos que quando as estruturas eletromagnéticas estão associadas a circuitos de alimentação mais complexos, é importante considerar um acoplamento forte entre estas equações.

Neste trabalho o circuito elétrico é modelado em variáveis no espaço de estados, podendo apresentar uma topologia qualquer, incluindo dispositivos semicondutores operando como interruptores [44] [71] [72] [73].

O processo de obtenção das equações do circuito, seu acoplamento direto com as equações de campo e a resolução final é totalmente automática. Os dados de entrada necessários para a análise são os pontos de conexão dos elementos do circuito (seus nós) e os valores destes componentes.

Os circuitos de alimentação podem conter diversos elementos em sua estrutura, como componentes ativos e passivos, lineares ou não. Sua modelagem é desenvolvida com o auxílio da Teoria dos Grafos em conjunto com a Teoria dos Circuitos Elétricos. A partir da declaração da topologia do circuito, todas as grandezas elétricas podem ser calculadas aplicando-se as teorias mencionadas [44] [71] [72] [73].

Inicialmente, o processo de equacionamento do circuito ocorre com a declaração da posição relativa dos componentes através de seus nós. De posse destas informações, é possível, então, compor sua matriz de incidência [44] [71]. A automatização do processo é, em parte, vinculada à aplicação do algoritmo de Welsh [71] sobre a matriz de incidência, pela qual se determina uma possível árvore do circuito com os correspondentes elementos de ramo e elo, bem como as matrizes de laços fundamentais, B_1 , e de cortes fundamentais K_2 [44] [71].

$$[v_e] = -B_1 [v_r],$$

$$[i_r] = -K_2 [i_e].$$

A matriz de laços fundamentais relaciona as tensões entre elementos ramo e elementos elo para cada caminho fechado do circuito, traduzindo-se na Lei de Kirchhoff das Malhas. Analogamente, a matriz de cortes fundamentais relaciona as correntes entre elementos ramo e elo para cada nó do circuito, referindo-se à Lei de Kirchhoff dos Nós.

No software GetDP, para cada ramo do circuito estão associadas uma corrente e uma tensão, essas duas grandezas sendo religadas por uma relação de circuito (por exemplo, resistência, indutância, etc, ou uma relação proveniente do modelo de elementos finitos). Em seguida, as leis de Kirchhoff são enunciadas, ou seja, lei das correntes para a matriz dos nós e lei das tensões para a matriz das malhas independentes.

Os interruptores (diodos, tiristores, transistores) são modelados utilizando-se um elemento resistivo na caracterização destes elementos. São considerados com resistências elevadas, quando bloqueados, e com resistência de baixo valor, quando conduzindo. As transições de estados são feitas automaticamente e o tipo de monitoramento depende do modelo do interruptor: diodos, tiristores, transistores ou tiristores duais.

Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos [44] [71] [72] [73].

3.3 CONDIÇÕES DE PERIODICIDADE

Geralmente, para modelar máquinas elétricas com um número inteiro de ranhuras por pólo e não apresentando enrolamento fracionário, o domínio de cálculo pode ser reduzido para um ou dois pólos usando condições de contorno periódicas ou anti-periódicas [26] [74] [75] [76] [77].

Diferentes tipos de elementos finitos, isto é, elemento nodal, de aresta, de face; nos quais os graus de liberdade associados com entidades numéricas são nós, arestas e faces; são projetados para serem conectados através de tais condições. Desse modo, as condições de conexão consistem parcialmente de relações entre esses graus de liberdade.

A implementação dessas condições é semelhante àsquelas usadas para elementos nodais, com a diferença de que para elementos de aresta é preciso assegurar a correspondência geométrica das mesmas. Por exemplo, sobre a Figura 3.1, todos os nós ligados às superfícies Γ_A e Γ_B são corretamente associados e isso não apresenta nenhum problema quando se utiliza elementos nodais. No entanto, quando se utiliza uma discretização por elementos de aresta, essa configuração não é correta, pois as arestas k_1 e k_2 não estão associadas do ponto de vista geométrico. Assim, é preciso corrigir a malha a fim de assegurar as condições de periodicidade.

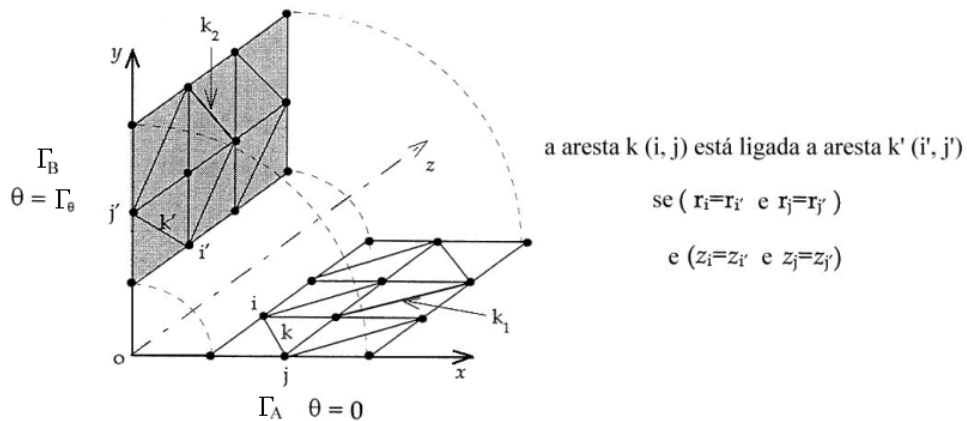


Figura 3.1 – Condições de periodicidade com elementos de aresta.

De uma forma geral, para aplicar as condições de periodicidade (anti-periodicidade) considera-se que qualquer par de fronteiras a ser conectado é similarmente discretizado, ou seja, que existe uma única aplicação ligando suas entidades numéricas por pares. Tais fronteiras são denotadas por Γ_A e Γ_B , respectivamente a fronteira de referência contendo os graus de liberdade e sua fronteira associada, onde os graus de liberdade são todos associados com a fronteira de referência através de relações [74] [75].

3.3.1 Formulação conforme em \mathbf{b} :

Para as formulações conforme em \mathbf{b} , por exemplo formulação em \mathbf{a} , as condições de periodicidade são distribuídas em uma relação forte sobre a componente normal de \mathbf{b} e uma relação fraca sobre a componente tangencial do campo magnético \mathbf{h} .

Quando elementos finitos de aresta são usados para \mathbf{a} , a relação de periodicidade forte (anti-periodicidade, com o outro sinal) para um par de arestas igualmente orientadas sobre Γ_A e Γ_B é [74] [75] [78]

$$a_B = \pm a_A, \quad (3.14)$$

onde a_A e a_B são as circulações de \mathbf{a} ao longo das arestas consideradas sobre Γ_A e Γ_B .

A forma fraca das condições de periodicidade é obtida do termo $\mathbf{n} \times \mathbf{h}$ da integral de superfície da formulação fraca apresentada anteriormente, onde este termo representa uma restrição no campo magnético associado com certas fronteiras Γ_h do domínio Ω [74] [75] [78].

A relação de periodicidade fraca é dada por:

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \mathbf{a}'_B \rangle_{\Gamma_B} = - \langle \pm \mathbf{n} \times \mathbf{h}, \pm \mathbf{a}'_A \rangle_{\Gamma_A}. \quad (3.15)$$

Para esta formulação em 3D, usando elementos de aresta para \mathbf{a} , é necessário que as condições de periodicidade sejam consistentes com as condições de calibre (quando usadas) associadas com as árvores das arestas [52]. Na realidade, tal condição de calibre deve ser idêntica sobre as fronteiras Γ_A e Γ_B a serem conectadas. Um modo de realizar isso é construir uma árvore completa de arestas sobre Γ_A , sem construir qualquer árvore sobre Γ_B . As relações de conexão entre todas as arestas de Γ_B e de Γ_A conduzirão, implicitamente, à uma aplicação correta da extensão da condição de calibre sobre Γ_B [74] [75] [78].

3.3.2 Formulação conforme em \mathbf{h} :

Para essas formulações, as condições de periodicidade são distribuídas em uma relação forte sobre a componente tangencial do campo magnético \mathbf{h} e em uma relação fraca sobre a componente normal de \mathbf{b} , estando assim em complementaridade com as formulações conforme em \mathbf{b} .

Com tais formulações, por exemplo as formulações em $\mathbf{h} - \phi$, não existem relações diretas entre as quantidades únicas das duas fronteiras associadas como na formulação \mathbf{a} [74] [75] [78].

Isso se deve ao fato de que essas formulações envolvem campos magnéticos fontes, os quais tornam as relações de periodicidade, bem como seu tratamento mais complexo.

Quando elementos finitos de aresta são usados para \mathbf{h} , a relação de periodicidade forte (anti-periodicidade, com o outro sinal) para um par de arestas igualmente orientadas sobre Γ_A e Γ_B é

$$h_{r,B} = (\pm h_{s,A} - h_{s,B}) \pm h_{r,A}, \quad (3.16)$$

onde $h_{s,A}$ e $h_{r,A}$ (respectivamente $h_{s,B}$ e $h_{r,B}$) são as circulações dos campos magnéticos fontes e de reação ao longo da aresta considerada sobre Γ_A (respectivamente sobre Γ_B). Se um potencial ϕ é definido, isto é $h_r = \phi_i - \phi_j$ (diferença de ϕ em ambos os nós i e j da aresta), (3.16) torna-se

$$\phi_{j,B} = -(\pm h_{s,A} - h_{s,B}) - (\pm \phi_{i,A} - \phi_{i,B}) \pm \phi_{j,A}. \quad (3.17)$$

Como uma certa liberdade é permitida na definição do campo fonte [50], o mesmo pode ser escolhido com um suporte não incluindo as fronteiras Γ_A e Γ_B (ou seja, $h_{s,A} = h_{s,B} = 0$) ou com valores periódicos (anti-periódicos) sobre Γ_A e Γ_B (ou seja, $h_{s,B} = \pm h_{s,A}$). Nestes casos, as equações (3.16) e (3.17) tornam-se simplesmente [74] [75],

$$h_{r,B} = \pm h_{r,A}, \quad (3.18)$$

e

$$\phi_{j,B} = \pm \phi_{j,A}. \quad (3.19)$$

3.4 MÉTODOS PARA LEVAR EM CONTA O MOVIMENTO

Alguns dispositivos eletrotécnicos como, por exemplo, os conversores eletromecânicos, contêm partes em movimento. Os métodos para levar em conta o movimento podem ser classificados em duas categorias [40] [41] [42] [79] [80]:

i) a utilização de um único referencial independente da posição da parte móvel. O movimento é então modelado pela introdução na equação do campo do termo $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$ onde \mathbf{v} é a velocidade de rotação ou de translação [4]. Isso só é possível se o sistema comporta uma parte móvel condutora invariante segundo a direção do movimento. Neste caso, com a discretização espacial efetuada pelo método de elementos finitos, as equações matriciais não são mais simétricas e a utilização de

técnicas especiais torna-se necessária. Esse método só se aplica à sistemas particulares possuindo uma parte móvel de estrutura simples [42].

ii) a utilização de dois referenciais, um móvel Ω_m relacionado à parte em movimento e o outro à parte fixa Ω_f , mostrado na Figura 3.2. Nessa abordagem, o movimento é tratado na região do entreferro.

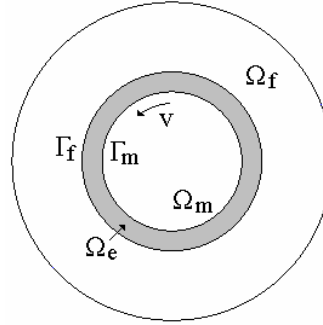


Figura 3.2 - Utilização de dois referenciais.

Neste trabalho, será apresentado um resumo dos métodos desenvolvidos na segunda categoria. Estes métodos podem ser classificados como seguem [35]:

- os métodos integrais;
- a recolagem das malhas fixa e móvel;
- as técnicas de remalhagem – técnica da banda de movimento (remalhagem parcial). Dentro das técnicas de remalhagem existe, ainda, a técnica de remalhagem completa que consiste na remalhagem completa da geometria do domínio para cada deslocamento da parte móvel.

3.4.1 Métodos Integrais

As partes fixa e móvel são acopladas no entreferro por fórmulas integrais que utilizam os nós das bordas Γ_m e Γ_f do entreferro. Esse acoplamento não necessita malhar o entreferro e pode ser efetuado utilizando:

- os métodos de integrais de fronteira MIF [24];
- o uso de um macro-elemento na região do entreferro [25].

Integrais de Fronteiras

O princípio deste método é de restabelecer a solução do problema definido em um volume numa solução equivalente sobre a superfície. Essa superfície deve envolver o volume e não deve conter materiais não-lineares, como é o caso do entreferro. Os resultados obtidos pela sua aplicação

no movimento são satisfatórios e não dependem do deslocamento [24]. No entanto, a matriz do sistema é cheia no nível dos graus de liberdade associados as interfaces Γ_m e Γ_f . Desse modo, sua extensão a estrutura 3D vai produzir custos elevados em tamanho de memória.

Macro-elemento

Neste método o entreferro constitui uma espécie de elemento finito de vários nós, de onde o nome de macro-elemento. Em 2D, esse método consiste em determinar uma solução analítica da equação de Laplace $\Delta a_z = 0$ na parte uniforme do entreferro [25]. Utilizando coordenadas polares é possível resolver esta equação com uma separação de variáveis. Com um potencial periódico, a solução é obtida por um desenvolvimento em série de Fourier. O acoplamento dessa solução com o cálculo por elementos finitos é efetuado assegurando a continuidade do potencial a_z nos nós das fronteiras. A matriz resultante do cálculo por elementos finitos é cheia no nível dos graus de liberdade ligados as fronteiras Γ_m e Γ_f . Além disso, para obter uma precisão satisfatória, é preciso utilizar um grande número de harmônicos para a série de Fourier. Por essas razões, o macro-elemento produz tempos de cálculo elevados para uma malha fina em 2D. No entanto, dá resultados precisos e não impõe restrições sobre a escolha do deslocamento. Teoricamente, é possível desenvolver o mesmo princípio em 3D com coordenadas cilíndricas.

3.4.2 Métodos de recolagem das malhas

A conexão das malhas fixa e móvel é feita no nível de uma interface Γ_e , mostrada na Figura 3.3. Essa superfície pode ser confundida com Γ_m e Γ_f , ou situada sobre as duas. Nesse último caso, uma parte do volume do entreferro é ligado a Ω_m e a outra a Ω_f . Para realizar essa conexão vários métodos foram desenvolvidos:

- os multiplicadores de Lagrange [26] [27] [28] [29] [30] [31];
- o método de interpolação ou extrapolação nodal [32] [33] [34];
- a linha de deslizamento em 2D e a superfície de deslizamento em 3D [35] [36] [37] [38].

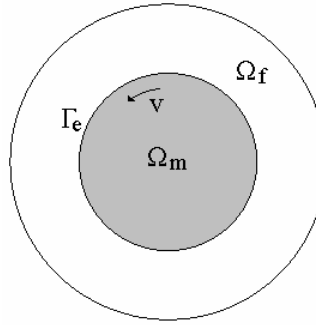


Figura 3.3 - Utilização de uma superfície de recolagem.

Multiplicadores de Lagrange

Este método permite a recolagem das partes fixa e móvel utilizando restrições adicionais ligadas a continuidade do campo ou da indução. Em outras palavras, a cada deslocamento, acrescentam-se às equações que asseguram as condições de transmissão de \mathbf{h} ou de \mathbf{b} na interface Γ_e .

Para o potencial vetor \mathbf{a} , o princípio consiste em determinar o mínimo dos funcionais de energia dos domínios Ω_m e Ω_f , e de um funcional ligado a continuidade de \mathbf{a} . Esse funcional está ligado a uma incógnita suplementar λ , chamada Lagrangiano. Esse mínimo é calculado cancelando o diferencial.

A discretização pelo método de elementos finitos conduz a um sistema matricial cujas incógnitas são os potenciais vetores \mathbf{a}_m e \mathbf{a}_f do Lagrangiano λ . A vantagem deste método é que ele gera um sistema próximo àquele dos elementos finitos. No entanto, ele está ligado a formulação utilizada e às funções de aproximação e torna-se necessário desenvolver rotinas de cálculo para cada tipo de abordagem [26] [27] [28] [29] [30] [31].

Métodos de interpolação e extrapolação nodal

A técnica de interpolação é baseada na conexão dos nós das bordas móveis (situadas sobre Γ_e) aos elementos da parte fixa. As malhas fixa e móvel podem ser realizadas separadamente [33] [34]. Este método tem a vantagem de ser independente da formulação utilizada e de guardar a estrutura da matriz do sistema sem produzir incógnitas suplementares. Por outro lado, por apresentar um caráter nodal, só assegura a média da continuidade do potencial vetor.

A extrapolação nodal é introduzida para superar essas dificuldades criando uma conexão superficial por uma malha de pontos suplementares na interface. No meio destes pontos, pode-se

escolher os pontos de integração de Gauss o que implica num crescimento dos graus de liberdade e num tratamento particular para os pontos acrescentados. Os resultados obtidos são satisfatórios, mas sua aplicação permanece limitada aos elementos nodais [32].

Linha de Deslizamento

A conexão das malhas fixa e móvel se efetua segundo uma linha. Este método é simples para utilizar, mas exige uma malha regular no nível da interface Γ_e . A linha de deslizamento deve ser subdividida em segmentos tendo o mesmo comprimento.

O inconveniente dessa técnica é que ela não permite o deslocamento independente do passo da malha. Desse modo, o passo de tempo corresponde a um número inteiro do passo da malha. Tem como vantagem guardar as propriedades das matrizes de elementos finitos sem produzir incógnitas suplementares.

Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento é simplesmente a extensão à 3D da linha de deslizamento [35] [36] [37] [38]. Para utilizar este método é preciso que a malha seja regular no nível da interface Γ_e . Também é preciso assegurar a conformidade da malha a cada deslocamento. Uma malha é dita conforme, quando a interface entre dois elementos quaisquer é uma face comum. Essa propriedade é garantida com uma malha regular em nós e arestas.

Para a linha de deslizamento, o movimento está ligado ao passo da malha. Em [35] esta dificuldade foi superada recalculando as coordenadas da parte móvel em função do deslocamento, o que implica em uma leve deformação dos elementos do entreferro.

3.4.3 Método da Banda de Movimento

As ferramentas desenvolvidas para as condições de contorno de periodicidade podem ser diretamente aplicadas a conexão da banda de movimento, como mostrado na Figura 3.4. A conexão entre as regiões de movimento e estacionária (ambas sendo malhadas separadamente), através da banda de movimento, é similar a condição de periodicidade (identificação direta dos graus de liberdade; Figura 3.4, fronteira $b - b'$). Quando as condições de periodicidade ou anti-periodicidade

são consideradas em ambos os lados da banda (Figura 3.4, fronteiras $a - a'$), uma parte complementar desta banda existe e tem de ser conectada através das mesmas condições da região em movimento (Figura 3.4, fronteiras $c - c'$).

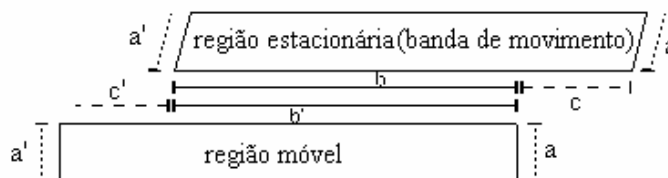


Figura 3.4 - Conexão das condições de fronteira com a banda de movimento.

As condições de periodicidade associadas com as condições de calibre e com os campos fontes permanecem válidas. No entanto, algumas restrições adicionais devem ser satisfeitas, pois a topologia é geralmente modificada para qualquer posição nova da região em movimento. Um campo fonte não pode cruzar as fronteira de conexão, isto é sua componente tangencial deve ser nula nestas fronteiras, e uma árvore de condição de calibre deve ser completa nessas fronteiras [74] [75].

A técnica da banda de movimento permite um deslocamento independente do passo da discretização, desde que seja tolerada a deformação dos elementos situados na banda. Além disso, o princípio de sua implementação baseia-se na alocação dinâmica das condições de periodicidade e anti-periodicidade, de forma que não existe criação de incógnitas suplementares.

O fato da técnica da banda de movimento permitir um deslocamento independente do passo de discretização é importante na análise de acoplamento dispositivo/conversor, uma vez que nestas análises o passo de cálculo é uma função não somente do circuito, mas principalmente dos instantes de operação em que este se encontra [71]. Assim, quando uma mudança de estado de um ou vários interruptores é detectada, o passo de cálculo é automaticamente diminuído para melhor caracterização do sistema. Passados estes instantes de transição, o passo de cálculo pode assumir um valor maior, não prejudicando o tempo de processamento. Desse modo, deve-se manter livre a variação do tamanho do passo de cálculo ao longo do intervalo de simulação, permitindo sua adaptação as diferentes seqüências de operação do sistema de forma independente da malha de discretização do dispositivo.

Em 2D, a utilização de elementos triangulares no entreferro pode acarretar imprecisões para o cálculo de certas grandezas globais como, por exemplo, o torque em função do deslocamento. Em [42] foi proposto o uso de elementos quadriláteros específicos para obter uma melhor precisão. Os elementos quadriláteros são decompostos em triângulos, os quais são escolhidos em função de um fator de qualidade.

Com a rotação de um ângulo qualquer, uma nova posição da parte móvel pode conduzir à uma deformação dos elementos da banda de movimento. Essa deformação pode conduzir a imprecisões na determinação de grandezas globais, tais como o fluxo magnético, força eletromotriz, etc. Essas imprecisões ou ruídos numéricos nem sempre são visíveis na curva do fluxo, mas tornam-se perceptíveis na curva da força eletromotriz ($fem = -\partial_t \Psi$) onde o ruído numérico é amplificado pela derivação. Este problema foi resolvido usando-se elementos hierárquicos na banda de movimento (ver próximo capítulo) para os problemas analisados.

Quando o ângulo de rotação excede o ângulo do domínio de estudo, uma translação é necessária [42]. Recentra-se então a parte móvel e se as condições de contorno são do tipo periódicas o processo continua normalmente como apresentado. No entanto, se é um problema com condições do tipo anti-periódicas, uma inversão do sinal das fontes de campo localizadas no rotor é efetuada.

É importante ressaltar o fato de que o movimento é considerado usando a abordagem Lagrangiana [81]. Esta abordagem é considerada implicitamente e de forma fácil na formulação em \mathbf{a} porque nenhuma deformação é feita nos domínios envolvendo a derivada em função do tempo, visto que esta derivada só ocorre nos domínios condutores. Entretanto, com a formulação em \mathbf{h} , a derivada em função do tempo está envolvida em todo o domínio, e conseqüentemente também na banda de movimento onde os elementos podem ser deformados. Neste último caso, a derivada em função do tempo tem de ser aplicada para todas as matrizes elementares desses elementos para levar em conta o movimento de forma correta.

Assim, decidiu-se implementar a técnica da banda de movimento na formulação magnetodinâmica em \mathbf{a} e na formulação magnetostática em \mathbf{h} . A obtenção da força eletromotriz na formulação \mathbf{h} é dada através da derivada do fluxo obtido de forma estática para cada posição do rotor.

Em [40] [41] foi proposta uma nova abordagem para o tratamento da matriz da banda de movimento em função da posição do rotor. Nestes trabalhos essa matriz é expressa por uma interpolação trigonométrica polinomial e por isso o método tem sido chamado Técnica de Interpolação da Banda. A propriedade mais vantajosa do método é a continuidade da matriz de rigidez e suas derivadas em relação ao ângulo o qual descreve a posição do rotor. Para uma malha regular este método tem sido usado em duas e três dimensões.

Existem outros métodos para se levar em conta o movimento, os quais não serão abordados neste texto [80] [82] [83] [84].

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentaram-se as equações de acoplamento para circuitos elétricos, considerando que os mesmos estão conectados através de condutores finos. Os circuitos externos são modelados em variáveis no espaço de estados. Apresentaram-se, também, as condições de periodicidade e anti-periodicidade. Essas condições de periodicidade foram analisadas tanto num sentido forte quanto num sentido fraco das formulações conforme em \mathbf{b} e \mathbf{h} .

Dos métodos existentes na literatura para se levar em conta o movimento, optou-se pela técnica da banda de movimento, pois ela permite um deslocamento independente do passo de discretização e não gera incógnitas suplementares devido a alocação dinâmica das condições de periodicidade e anti-periodicidade. Além disso, é uma técnica possível de ser implementada em diferentes formulações matemáticas e tem sido extensivamente utilizada em 2D com bons resultados.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS OBTIDOS

4.1. INTRODUÇÃO

Para validação dos procedimentos de cálculo desenvolvidos e implementados neste trabalho, alguns casos foram simulados e seus resultados são mostrados neste capítulo. O primeiro caso trata de um servomotor CA (motor de fluxo radial). O segundo caso trata de um motor de fluxo axial e o terceiro é um motor de fluxo transversal. Em todos estes casos, a malha 3D foi obtida pelo software Gmsh através de uma extrusão da malha do domínio em 2D. Assim, os elementos triangulares e quadriláteros em 2D se tornam, respectivamente, prismas e hexaedros em 3D. Todas as simulações foram realizadas considerando o material ferromagnético linear, ou seja, não foi levada em conta a saturação do mesmo.

4.2 SERVOMOTOR CA: MÁQUINA DE FLUXO RADIAL

Este primeiro conjunto de resultados foi obtido na simulação de um servomotor CA a ímãs permanentes fabricado especialmente para validação de nossas ferramentas pela *Weg Indústrias S.A. - Motores* com os seguintes parâmetros: potência nominal de 0,66 kW, tensão nominal de 220 Volts, corrente nominal de 3,9 A, torque nominal de 2,5 N.m, 8 pólos, trifásico. Duas condições de funcionamento foram simuladas [85] [86]:

- (a) servomotor operando como gerador a vazio. Nesta condição, estudaram-se dois casos: o primeiro considerando o passo de rotação igual ao passo de discretização da banda de movimento e o segundo caso, considerando o passo de rotação igual a uma fração do passo de discretização para forçar a deformação dos elementos da banda de movimento;
- (b) servomotor operando como gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos.

O servomotor em questão é uma máquina de oito pólos dotada de ímãs permanentes de Samário-Cobalto dispostos na periferia do rotor, fornecendo uma distribuição de fluxo radial. O estator comporta enrolamentos trifásicos conectados em estrela sem neutro. O domínio de estudo

adotado para a simulação, considerando-se condições de contorno anti-periódicas, consiste de um setor de 45° da estrutura original. Foram utilizadas as formulações em \mathbf{h} e \mathbf{a} para obtenção dos resultados das grandezas locais como, por exemplo, a indução magnética.

A Figura 4.1 mostra o domínio de estudo e a malha tridimensional obtida pelo software Gmsh através de uma extrusão do domínio em 2D, para um ângulo de rotação do rotor de $22,5^\circ$. As ferramentas numéricas e formulações foram desenvolvidas para geometrias em 3D. Elas são primeiramente aplicadas ao modelo 3D sem os efeitos de cabeça de bobina, a fim de serem validadas pelos modelos 2D bem estabelecidos [85] [86].

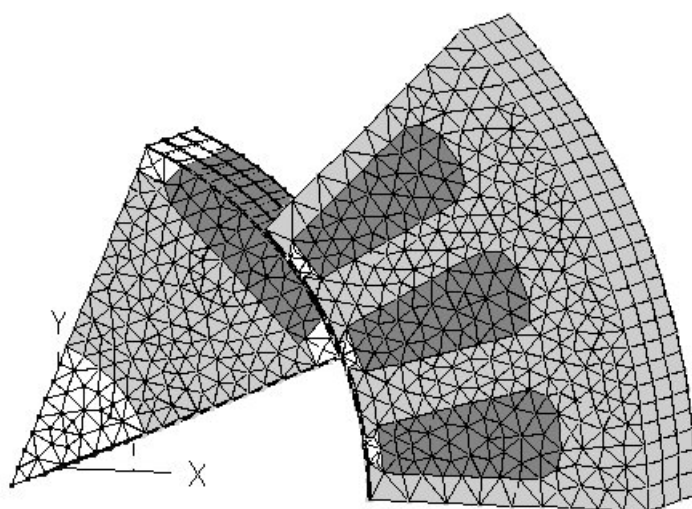
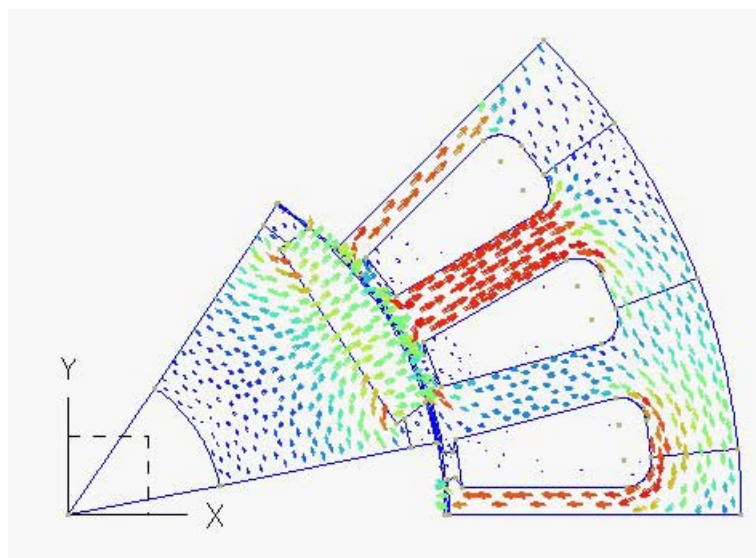
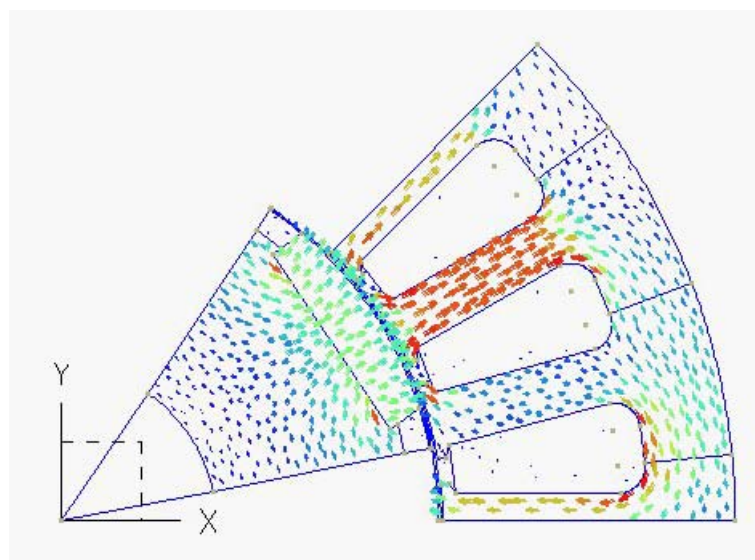


Figura 4.1 - Domínio de estudo e malha tridimensional.

As Figuras 4.2a-b mostram alguns resultados locais, quando o servomotor opera a vazio, ou seja, excitado somente pelos ímãs permanentes, para o ângulo de rotação do rotor de $11,25^\circ$. Para melhor visualização, somente as vistas frontais dos resultados em 3D são mostradas. A Figura 4.2a mostra a distribuição da indução magnética para a formulação \mathbf{a} . Similarmente, a Figura 4.2b mostra a distribuição da indução magnética, agora obtida com a formulação \mathbf{h} .

O objetivo desta análise é a obtenção de resultados de grandezas globais, como por exemplo, a força eletromotriz, para serem comparadas com os resultados experimentais. Além disso, deseja-se avaliar o comportamento da força eletromotriz quando os elementos da banda de movimento são distorcidos, situação esta que gera ruído numérico.

A exatidão dessas quantidades globais será estudada com o uso de elementos hexaédricos, prismáticos e hierárquicos na banda de movimento.

(a) formulação $\mathbf{a} - \mathbf{v}$.(b) formulação $\mathbf{h} - \phi$.Figura 4.2 - Distribuição da indução magnética para um ângulo de rotação de $11,25^\circ$.

Para os casos abaixo se usou primas ou uma combinação de hexaedros na banda de movimento e prismas nas demais regiões. A malha da estrutura tem 18 divisões ao longo da banda de movimento, de modo que o passo da discretização angular é de $2,5^\circ$.

4.2.1 Servomotor operando como gerador a vazio:

A exatidão da força eletromotriz é estudada com a formulação magnetodinâmica em potencial vetor magnético \mathbf{a} e com a formulação magnetostática em campo magnético \mathbf{h} para cada passo de tempo. Resultados são apresentados para uma velocidade de 435 rpm e quando o gerador opera em vazio, isto é, somente a excitação dos ímãs permanentes é considerada. Dois conjuntos de resultados da simulação da FEM são apresentados e comparados com a tensão induzida do gerador.

4.2.1.1 Passo de rotação igual a 2,5°:

Para este caso o passo de rotação é igual ao passo de discretização, de modo que não há deformação dos elementos situados na banda de movimento. As Figuras 4.3 e 4.4 mostram as tensões de fase nos três enrolamentos para a formulação magnetodinâmica em \mathbf{a} e para a formulação magnetostática em \mathbf{h} , respectivamente.

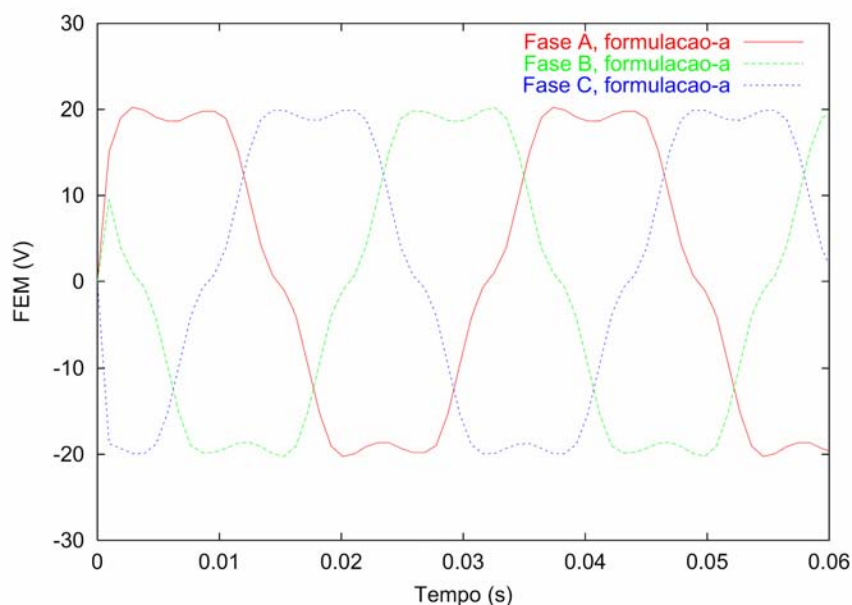


Figura 4.3 - Tensões de fase para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação \mathbf{a} .

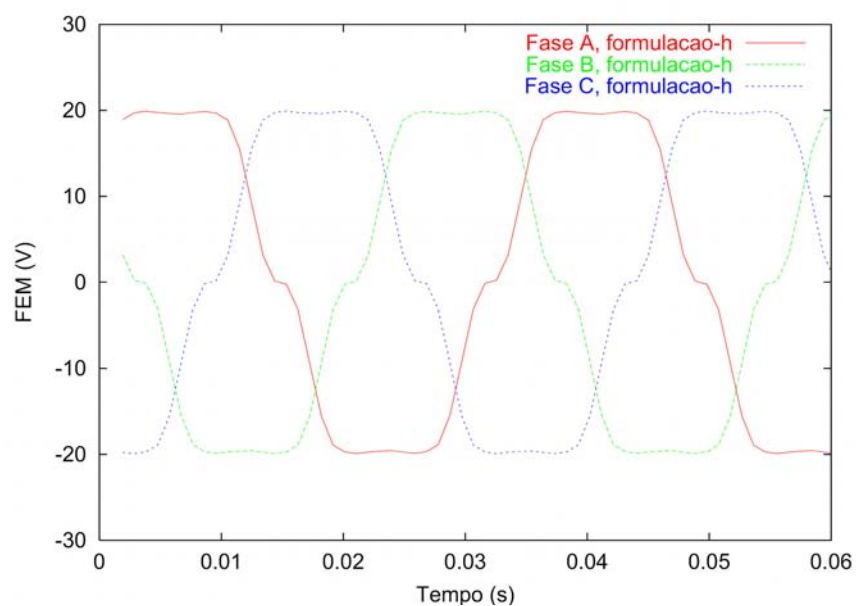


Figura 4.4 - Tensões de fase para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação h .

A Figura 4.5 compara os resultados de simulação para ambas as formulações com o resultado obtido em medição. Para este caso, as formas de onda da força eletromotriz (FEM) são iguais tanto com hexaedros quanto com prismas na banda de movimento. Nota-se uma boa concordância entre os resultados de simulação e da medição.

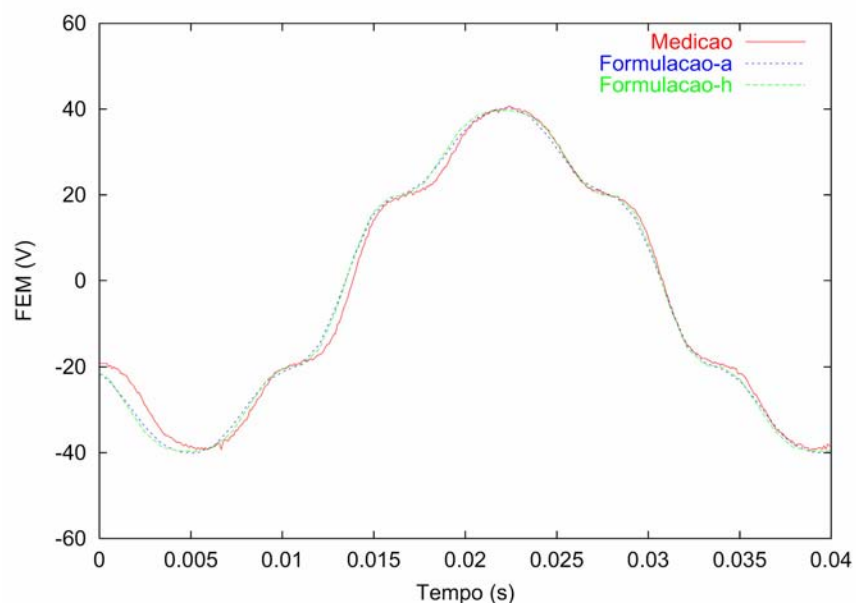


Figura 4.5 - Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio.

4.2.1.2 Passo de rotação igual a $0,5^\circ$

As figuras seguintes mostram os resultados obtidos para um passo de rotação igual à quinta parte do passo de discretização da banda de movimento. Neste caso, pode ser visto que por causa da distorção dos elementos da banda de movimento, as quantidades globais apresentam algumas oscilações numéricas para ambas formulações, tanto com hexaedros quanto com prismas na banda de movimento. Essas oscilações, as quais são aparentes nas curvas de FEM *versus* tempo, são amplificadas visto que na determinação da FEM está envolvida a derivada do fluxo magnético em relação ao tempo.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram as formas de onda das tensões de linha (FEM) para a formulação em \mathbf{a} considerando hexaedros e prismas de primeira ordem na banda de movimento. Similarmente, as figuras 4.8 e 4.9 mostram as formas de onda das tensões de linha usando os mesmos tipos de elementos na banda, agora obtidos com a formulação em \mathbf{h} .

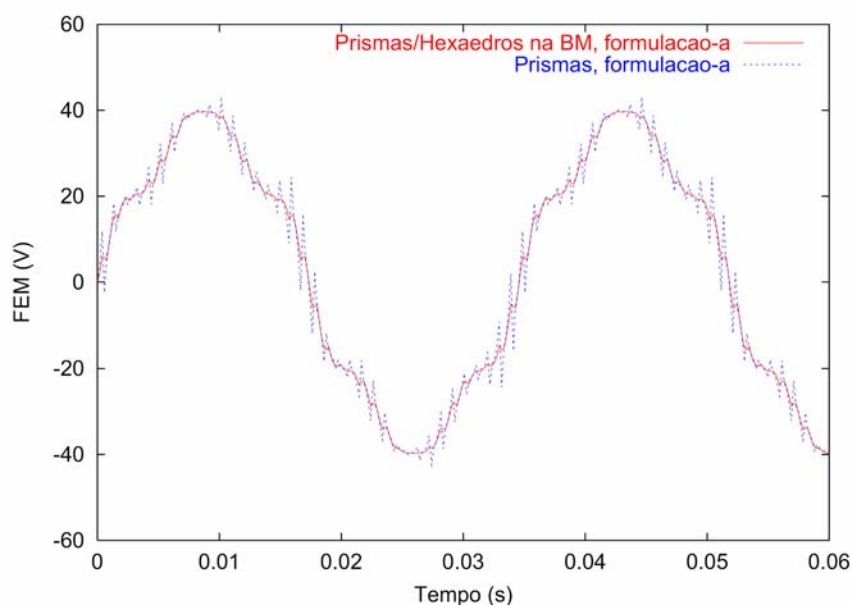


Figura 4.6 - Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação \mathbf{a} .

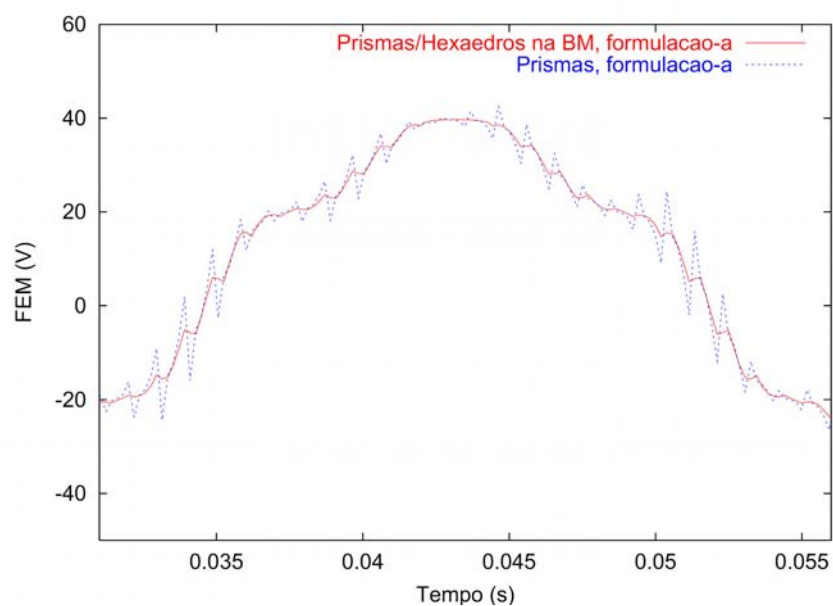


Figura 4.7 - Zoom da tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio –
formulação *a* .

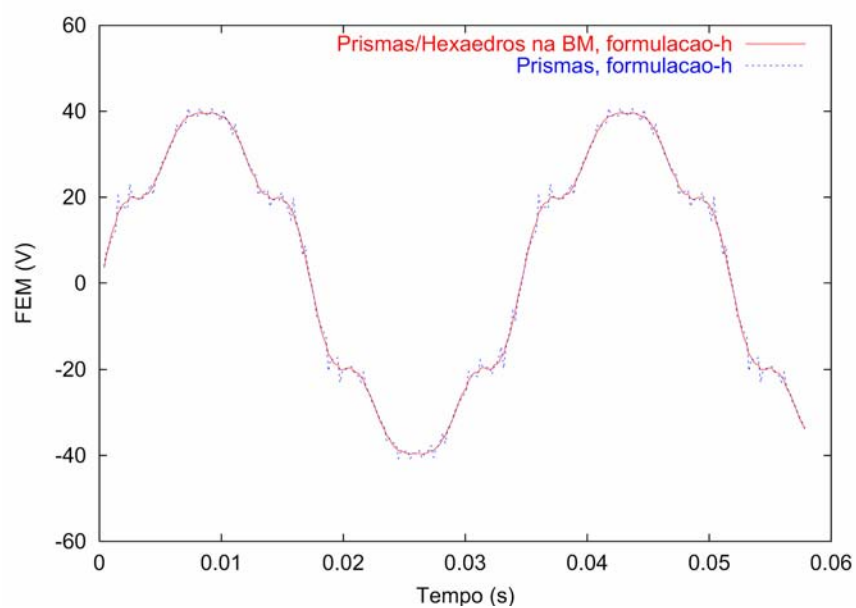


Figura 4.8 - Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio – formulação *h* .

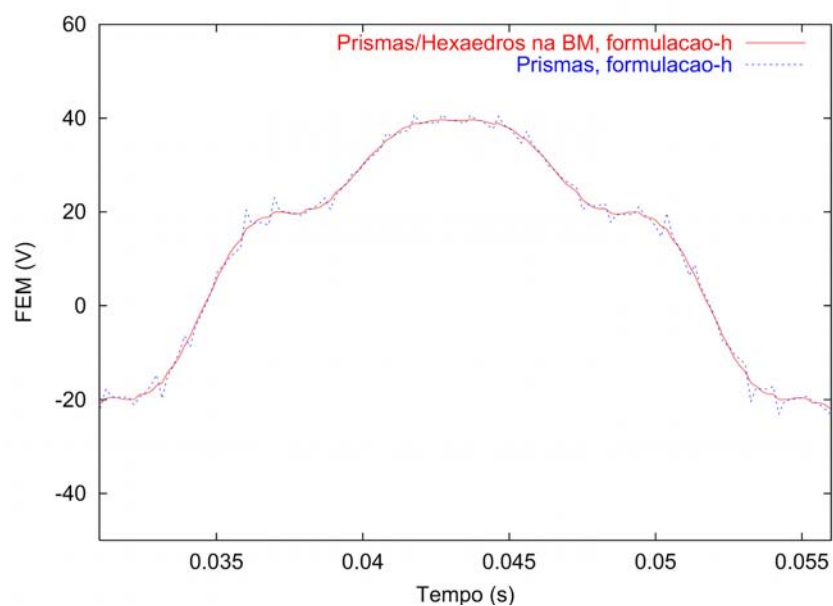


Figura 4.9 - Zoom da tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio –
formulação h .

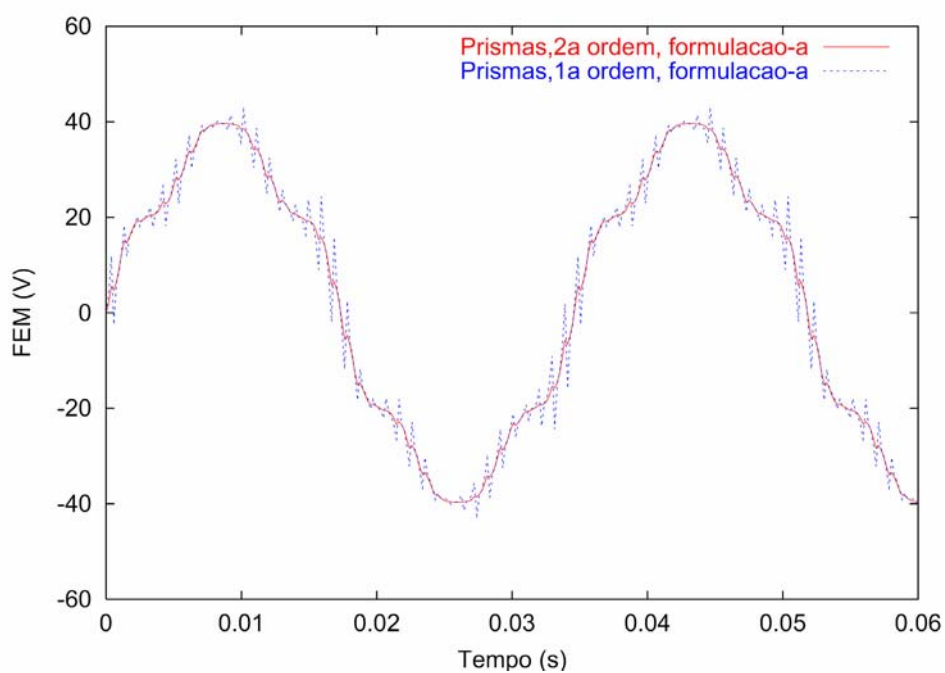


Figura 4.10 - Tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio com elementos
hierárquicos de primeira e segunda ordem polinomial – formulação a .

Observa-se que as discontinuidades são maiores com a formulação em a e com prismas na banda de movimento. Para esta formulação, elementos de aresta são usados na banda de movimento, enquanto elementos nodais são usados na formulação em h .

As oscilações observadas na FEM podem ser reduzidas quando funções de base hierárquicas (veja Anexo A) são adicionadas na banda para as entidades geométricas transversais (arestas e faces). As Figuras 4.10 e 4.11 mostram os resultados da aplicação de elementos finitos hierárquicos na banda de movimento.

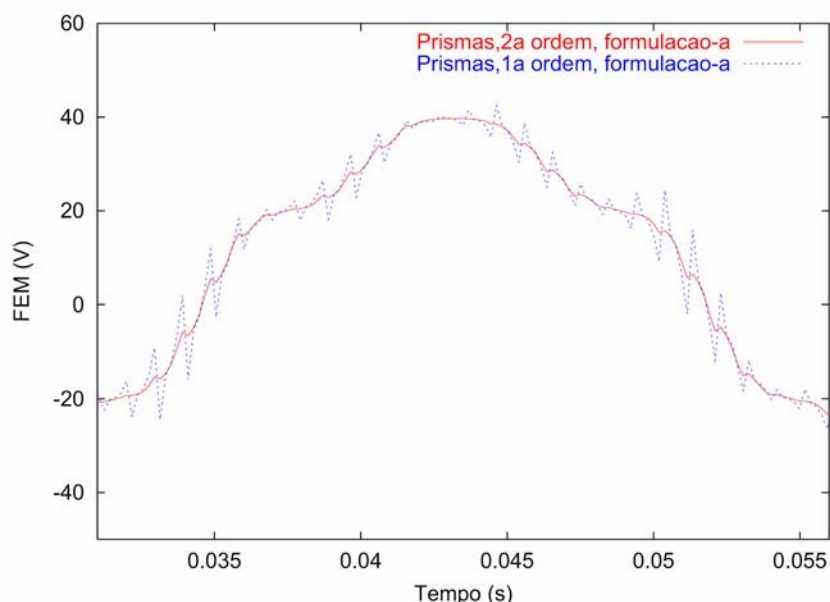


Figura 4.11 - Zoom das tensões de linha para o servomotor operando como gerador a vazio com elementos hierárquicos de primeira e segunda ordem polinomial – formulação **a**.

Neste primeiro exemplo, apresentou-se um estudo do servomotor CA operando a vazio e usando as formulações em **a** e **h**. A metodologia usada é validada pela comparação das formas de onda da tensão de linha medida e simulada.

Quando o passo de rotação é igual ao passo de discretização, os resultados obtidos pelas duas formulações são coerentes com a medição. No entanto, quando há deformação dos elementos da banda de movimento ocorrem oscilações numéricas. O nível de oscilação é maior com a formulação **a** e quando prismas são usados na banda de movimento. A análise da FEM tem demonstrado que o uso de funções de base hierárquicas diminui estas descontinuidades.

4.2.2. Servomotor operando como gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos

Neste item analisa-se o gerador alimentando uma carga resistiva de $20,5 \, \Omega$ através de uma ponte completa de diodos como apresentado na Figura 4.12. A velocidade de rotação para este exemplo é de 480 rpm. A Figura 4.13 mostra a corrente no enrolamento do gerador e a Figura 4.14

mostra a tensão de linha e a corrente na carga. Estas figuras são referentes aos resultados obtidos através de medição.

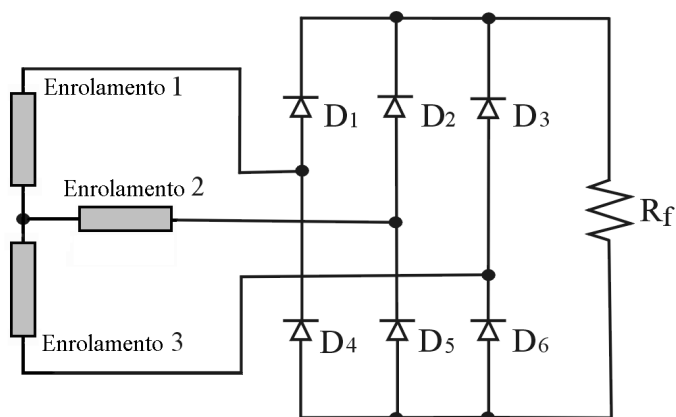


Figura 4.12 - Gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos.

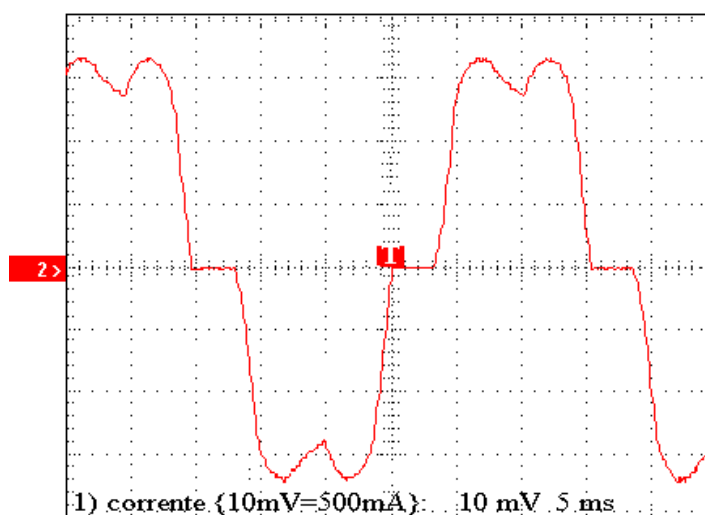


Figura 4.13 – Corrente no enrolamento do gerador – medição.

As Figuras 4.15, 4.16 e 4.17 apresentam os resultados da simulação. Na análise considerando o acoplamento com circuito externo contendo interruptores (tais como diodos, tiristores e transistores) é importante considerar o instante de comutação desses interruptores, para evitar erros de comportamento físico devido às imprecisões numéricas.

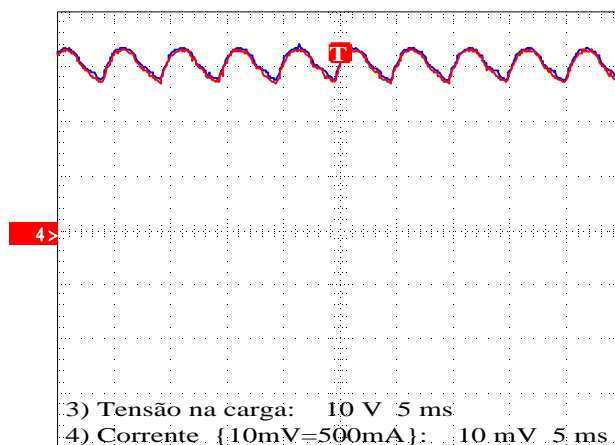


Figura 4.14 – Tensão de linha (azul) e corrente (vermelho) na carga resistiva – medição.

Com o modelo de valores de resistência binária para os interruptores, a comutação espontânea ocorre na passagem por zero de sua corrente ou de sua tensão. Desse modo, a cada passo de tempo, a tensão de cada interruptor é analisada. Quando um sinal de inversão é detectado, um processo de redução do passo de tempo é iniciado a fim de determinar os instantes anteriores e posteriores da comutação.

Para isso foi utilizado um método de discretização no tempo apresentado em [87]. Toda vez que o passo de tempo é modificado, o rotor é posicionado na posição referente ao passo de tempo correspondente.

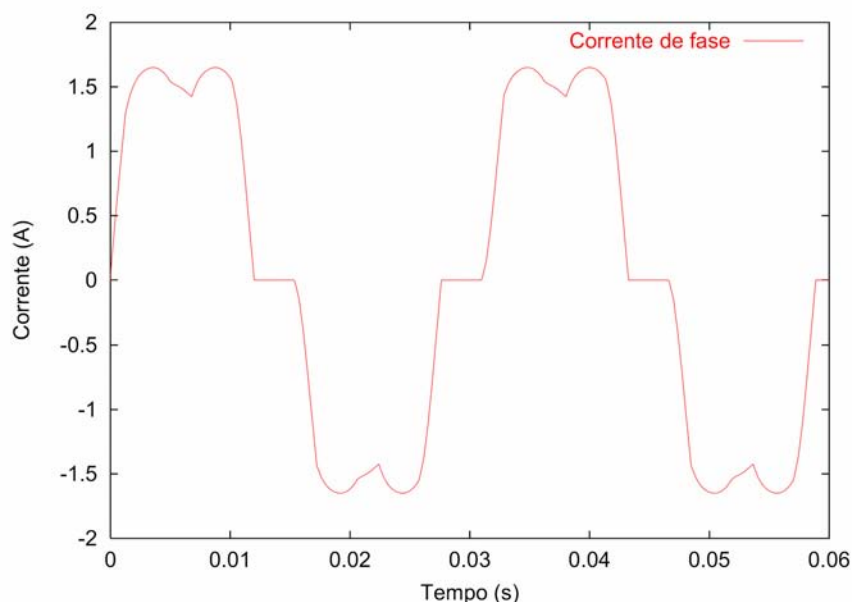


Figura 4.15 – Corrente no enrolamento do gerador – simulação.

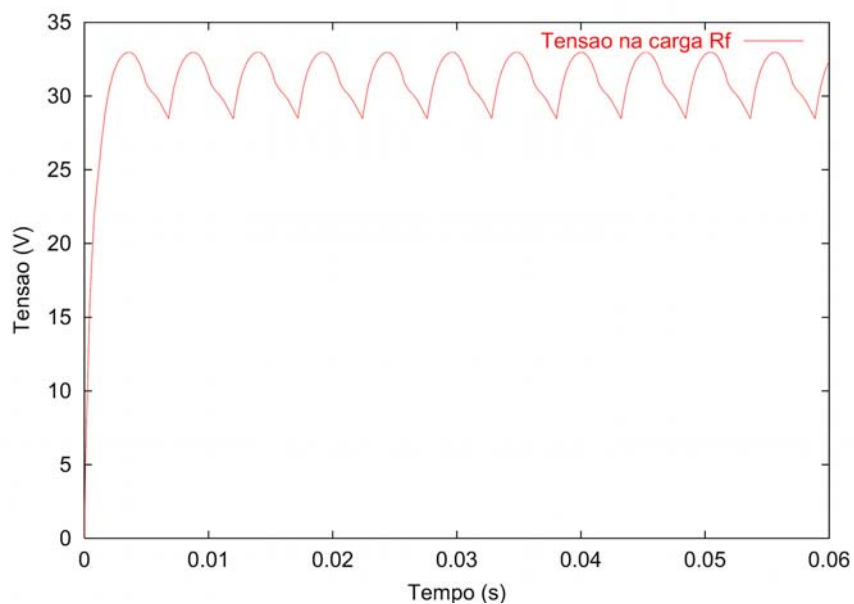


Figura 4.16 – Tensão na carga resistiva – simulação.

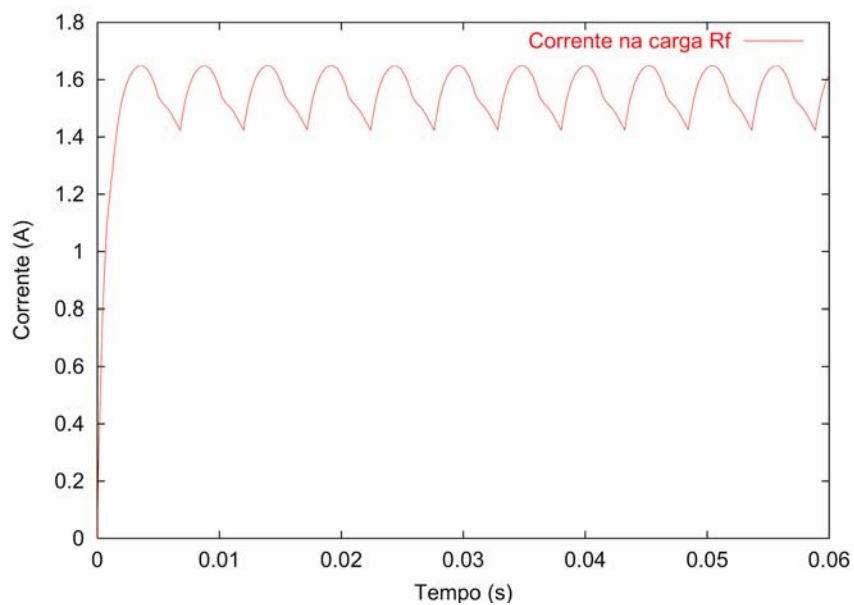


Figura 4.17 – Corrente na carga resistiva – simulação.

Este estudo permitiu validar os resultados obtidos com o acoplamento das equações de campo magnético com as do circuito externo, levando em conta o movimento do rotor e considerando um passo de tempo variável. Esta simulação durou aproximadamente 3 horas e 30 minutos e foi realizada num computador equipado com um processador AMD Duron 750MHz com memória 128MB e um HD de 10GB.

É importante ressaltar que para um passo de tempo muito pequeno, como por exemplo, para circuitos externos contendo transistores, uma análise tridimensional exige um grande esforço computacional, aumentando o tempo de processamento.

4.3 MOTOR DE FLUXO MAGNÉTICO AXIAL

Neste segundo conjunto de resultados é utilizado um motor de fluxo magnético axial e realizou-se uma comparação entre os resultados simulados em 2D e 3D [88]. Este tipo de máquinas tem encontrado um aumento de interesse para aplicações com alta performance, particularmente onde são requeridos velocidades altas, torque elevado, comprimento axial curto e alta relação potência/peso [89]. Máquinas deste tipo são caracterizadas por uma direção de fluxo no entreferro paralela ao eixo. O motor de fluxo magnético axial é uma alternativa atrativa do motor de fluxo radial cilíndrico, devido à sua curta carcaça, construção compacta e alta densidade de potência (possui maior densidade de torque do que os motores radiais tradicionais). O seu conceito não é novo. Ele foi inventado na Suíça durante a década de 40. Eles se tornaram largamente utilizados em aplicações como servo motor de baixo torque e em controle de velocidade.

A maioria dos artigos, encontrados na literatura, usa a simulação de campo magnético em 2D e métodos analíticos na sua análise [90] [91] [92]. Entretanto, uma análise de campo para máquinas com fluxo axial geralmente requer métodos de elementos finitos em 3D. No caso de regiões condutoras, a consideração de correntes parasitas nestas partes pode ser importante para a predição da performance da máquina.

A análise de um motor com ímãs permanentes com fluxo axial, 18 ranhuras, trifásico de seis pólos com velocidade nominal de 2500 rpm é considerada como aplicação dos métodos desenvolvidos neste trabalho. A estrutura deste motor é a mesma do motor estudado em [93], com a diferença de que os discos do rotor e estator são feitos de aço laminado e maciço, respectivamente. Os ímãs permanentes usados são de Nd-Fe-B e são encaixados no rotor em face ao núcleo do estator com o fluxo guiado na direção do entreferro.

Impondo condições de contorno anti-periódicas, o domínio de estudo pode ser reduzido para um setor de 60° e está mostrado na Figura 4.18. Os cálculos foram realizados para um modelo em 3D e um modelo simplificado em 2D. O modelo 3D pode ser simplificado para um modelo 2D introduzindo um plano de corte cilíndrico no raio médio dos ímãs. Esta seção axial é aberta em uma superfície bidimensional (visualização fica semelhante a um motor linear) na qual uma análise por elementos finitos pode ser realizada. No modelo em 2D, os efeitos de franjamento nos planos perpendiculares ao eixo y e a curvatura são desprezados. Malhas similares foram usadas para as análises em 2D e 3D [88].

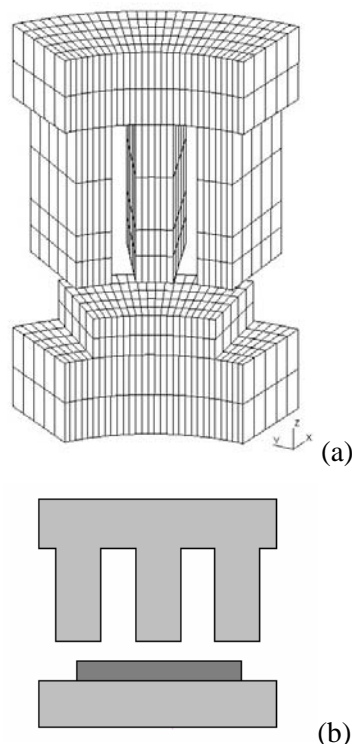


Figura 4.18 - Modelo em 3D (a) e 2D (b) do motor de ímã permanente com fluxo axial (da base para o topo: núcleo do rotor, ímã permanente, entreferro, núcleo do estator; os enrolamentos não são mostrados).

A exatidão da FEM é estudada com a formulação magnetodinâmica em \mathbf{a} e com a formulação magnetostática em \mathbf{h} . As figuras 4.19 e 4.20 mostram os resultados para uma velocidade de 2500 rpm e quando o motor opera a vazio, isto é, somente a excitação dos ímãs permanentes é considerada. O efeito da deformação dos elementos da banda de movimento é mostrado na Figura 4.21, mostrando descontinuidades numéricas para a FEM. Tais deformações ocorrem quando se consideram posições intermediárias do rotor entre os passos de discretização da banda de movimento.

A indução magnética é mostrada na Figura 4.22 para os modelos 2D e 3D. O modelo 2D dá uma boa aproximação para a indução magnética na região adotada para o plano de corte. No entanto, a variação radial da indução magnética é somente corretamente considerada com o modelo 3D, o qual torna-se mais importante quando se leva em conta a saturação.

Geralmente, o rotor não é laminado. A variação do campo magnético no rotor devido à variação da relutância do circuito magnético *versus* a posição acarreta em correntes de Foucault. Isto pode ser observado a vazio considerando o núcleo do rotor como uma região condutora. A Figura 4.23 mostra a FEM obtida considerando e desprezando as correntes de Foucault no rotor com uma formulação em \mathbf{a} e com uma condutividade $\sigma_{rotor} = 1.10^{-7} (\Omega.m)^{-1}$. Observa-se que nesta condição não houve uma influência significativa das correntes de Foucault sobre a FEM.

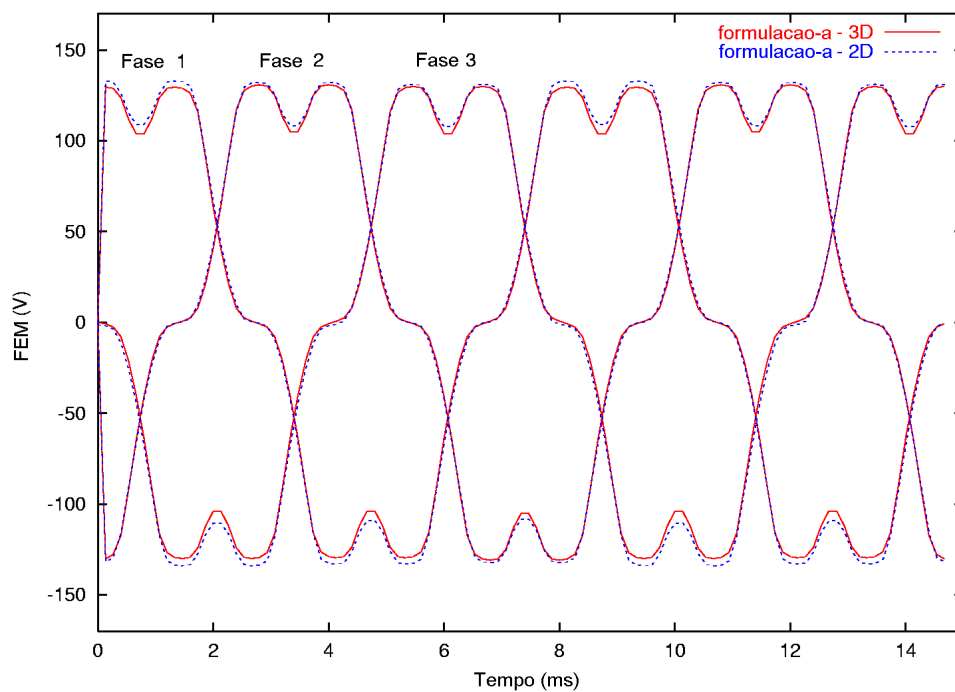


Figura 4.19 - FEM *versus* tempo para os modelos em 2D e 3D com a formulação a .

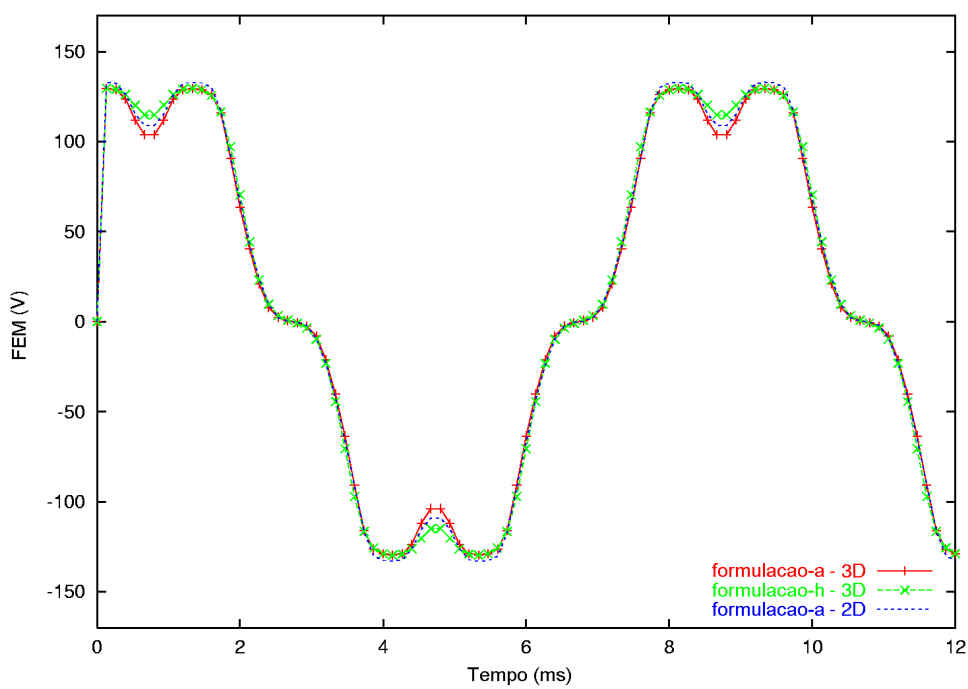


Figura 4.20 - FEM *versus* tempo para os modelos em 2D e 3D com as formulações a e h .

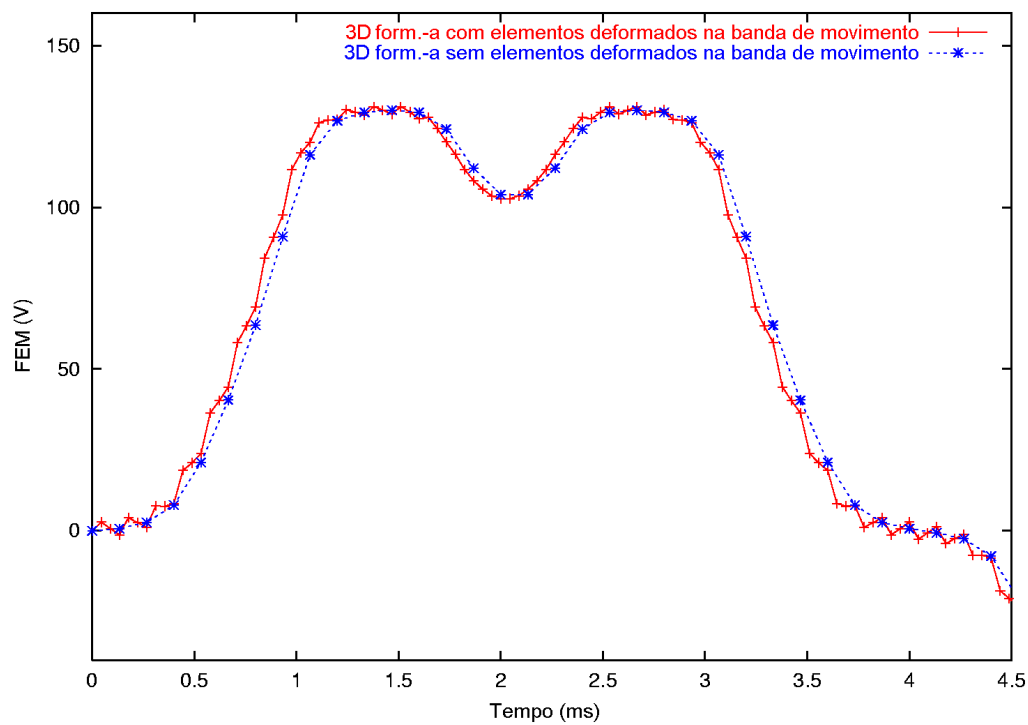


Figura 4.21 - FEM *versus* tempo com a formulação *a* com e sem os elementos deformados na BM.

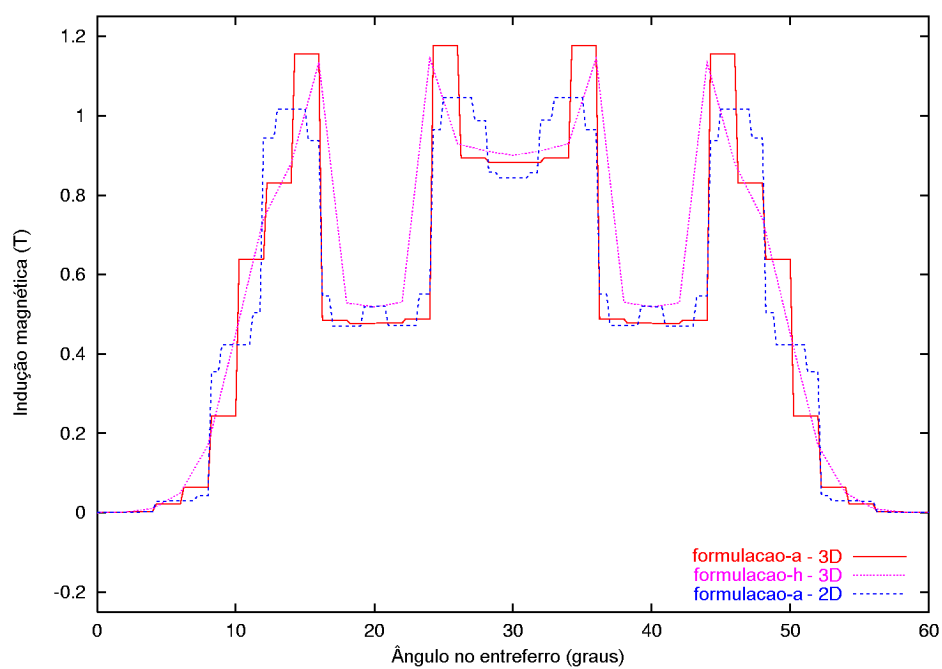


Figura 4.22 - Indução magnética ao longo do entreferro com as formulações *a* e *h* (no tempo $t = 0$ s).

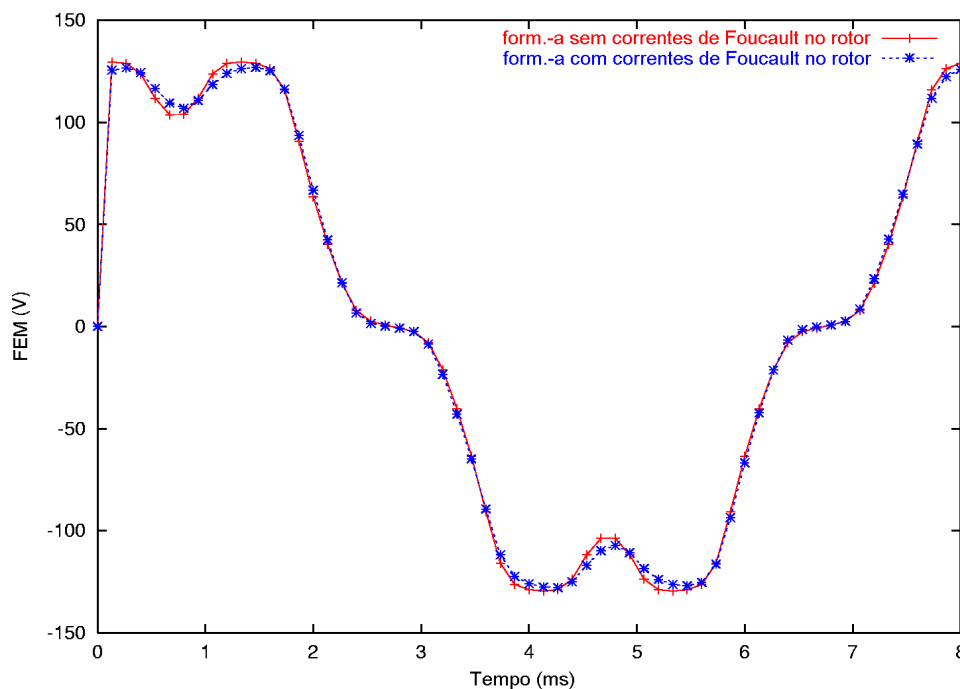


Figura 4.23 - FEM *versus* tempo sem e com correntes de Foucault no rotor (formulação *a*).

Nesta seção, apresentaram-se os resultados de simulação para um motor de topologia de fluxo axial. A técnica da banda de movimento e as condições de anti-periodicidade foram testadas tanto para um movimento rotacional (no caso do modelo em 3D) quanto para o movimento translacional (no caso do modelo em 2D). Os resultados obtidos em 2D e 3D foram coerentes.

4.4 MOTOR DE FLUXO TRANSVERSAL

A máquina de fluxo transversal utiliza um circuito magnético que está numa direção perpendicular (transversal) à direção do movimento e ao fluxo de corrente. Estas máquinas têm suscitado um grande interesse, pois possuem uma excelente relação torque/volume e torque/peso em comparação com máquinas convencionais [94] [95]. A razão para um torque específico alto é o desacoplamento dos caminhos de fluxo magnético e das bobinas da armadura, o qual permite obter uma alta densidade de força simplesmente aumentando o número de pares de pólos. Existem muitas aplicações para este tipo de motor como, por exemplo, motores de propulsão naval, geradores de energia eólica, etc.

Nos exemplos anteriores era possível analisar as máquinas em 2D. No entanto, uma análise precisa para máquinas com fluxo magnético transversal requer um método de elementos finitos tridimensional (3D). Nesta seção, apresenta-se um conjunto de ferramentas numéricas que foram

desenvolvidas para estudar eficientemente um motor de ímãs permanentes com fluxo magnético transversal em 3D [96].

Nesta seção uma análise magnetodinâmica é realizada usando uma formulação combinando um potencial vetor magnético com elementos de aresta e um potencial escalar elétrico com elementos nodais. O movimento é modelado usando-se duas bandas de movimento tridimensionais, onde as conexões entre as regiões em movimento e estacionária são consideradas com alocações dinâmicas das condições de periodicidade ou anti-periodicidade. A cada passo do deslocamento da parte em movimento, os elementos da banda de movimento são deformados até a metade da máxima deformação antes que suas conexões sejam modificadas.

A estrutura de uma fase do motor de ímãs permanentes com fluxo magnético transversal e o caminho do fluxo magnético são mostrados, respectivamente, nas Figuras 4.24 e 4.25. A força eletromotriz da máquina operando como gerador foi determinada [96]. Embora a força eletromotriz possa ser calculada através de uma formulação magnetostática para cada posição do rotor como apresentado em [97], neste exemplo uma formulação magnetodinâmica foi utilizada.

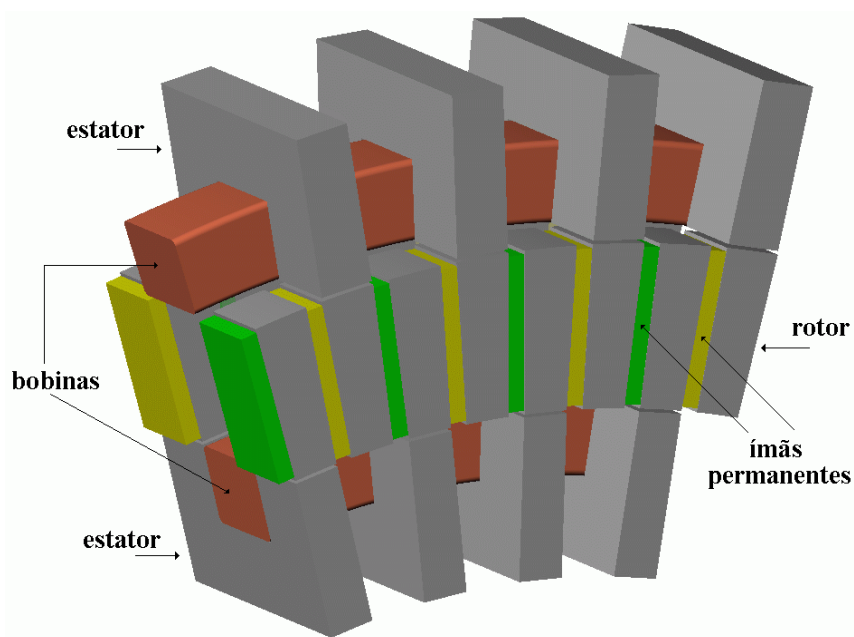


Figura 4.24 - Motor de ímãs permanentes com fluxo magnético transversal.

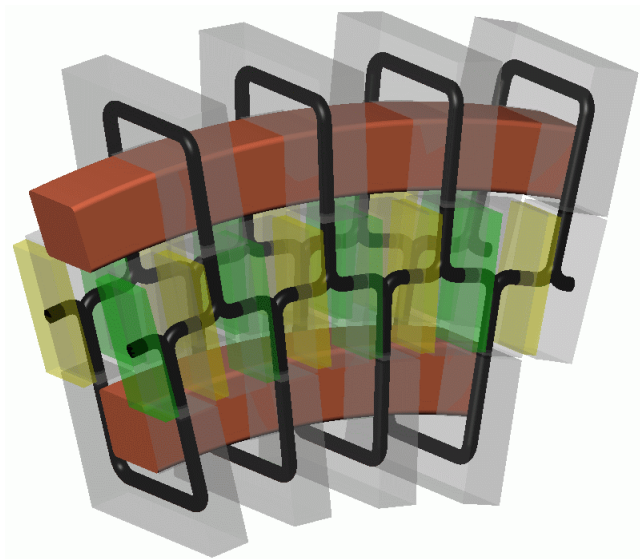


Figura 4.25 - Caminho do fluxo magnético na máquina com fluxo transversal.

Este protótipo da máquina com fluxo transversal foi construído pela *Weg Indústrias S.A. – Motores* com os seguintes parâmetros: tensão de fase nominal de 220 V, corrente de fase nominal de 17,3 A, potência nominal de 10 kW, número de pares de pólos 45, velocidade nominal de 200 rpm e ímãs de Nd-Fe-B.

Considerando a simetria eletromagnética e usando condições de periodicidade, o menor domínio de estudo consiste de um setor de 8 graus da estrutura original. A malha tridimensional da estrutura tem 40 divisões na banda de movimento.

A Figura 4.26 apresenta o domínio de estudo e a malha tridimensional sem os elementos de ar. Nesta figura se observam o estator, as bobinas, o rotor com os ímãs e as duas bandas de movimento sendo uma interna e outra externa ao rotor. Cada entreferro foi dividido em três camadas iguais, sendo a banda de movimento localizada na camada central. O entreferro foi aumentado propositadamente para tornar possível a visualização das bandas de movimento. Nesta malha usaram-se elementos hexaédricos nas bandas de movimento e prismas nas demais regiões.

A Figura 4.27 mostra a distribuição do campo fonte \mathbf{h}_s . A força eletromotriz (FEM) por fase é mostrada na Figura 4.28. Este resultado é obtido para uma velocidade de 200 rpm e quando o gerador opera a vazio, isto é, somente a excitação dos ímãs permanentes é considerada. A curva simulada apresenta boa concordância com a obtida experimentalmente pelo fabricante mostrada na Figura 4.29, validando os procedimentos de simulação implementados baseados na formulação apresentada neste trabalho.

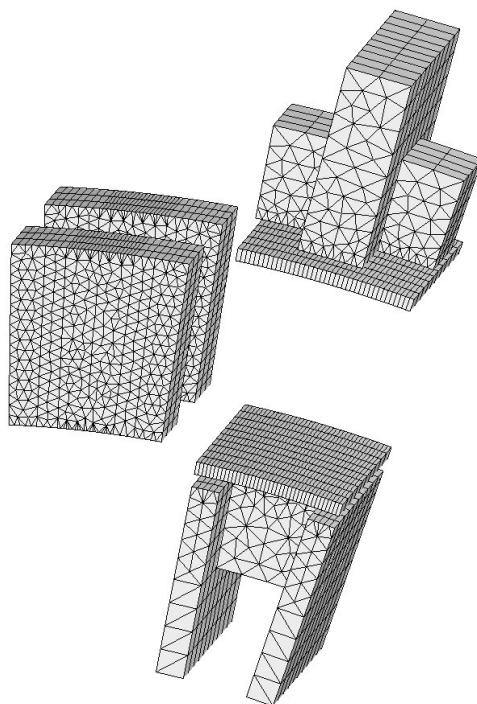


Figura 4.26 - Domínio de estudo e malha 3D.

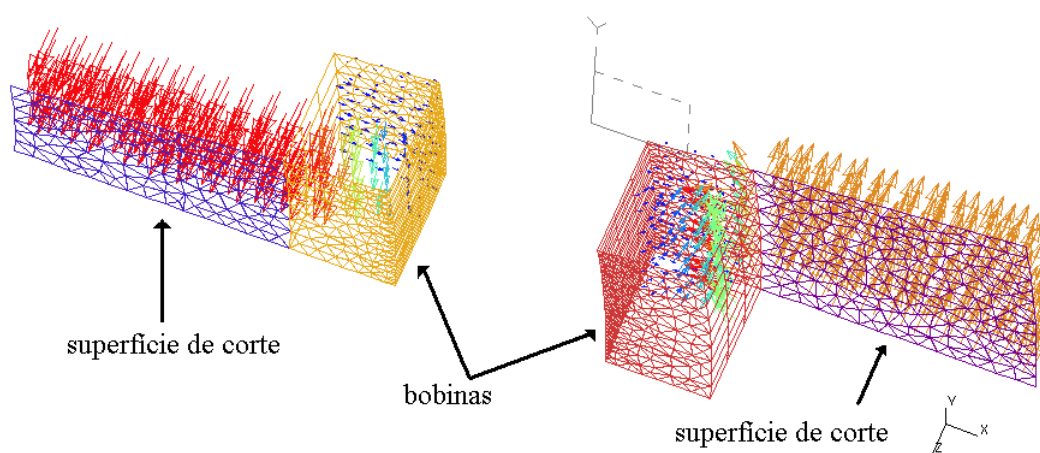


Figura 4.27 – Distribuição do campo fonte \mathbf{h}_s . O suporte desse campo é definido nas bobinas e nas superfícies de corte.

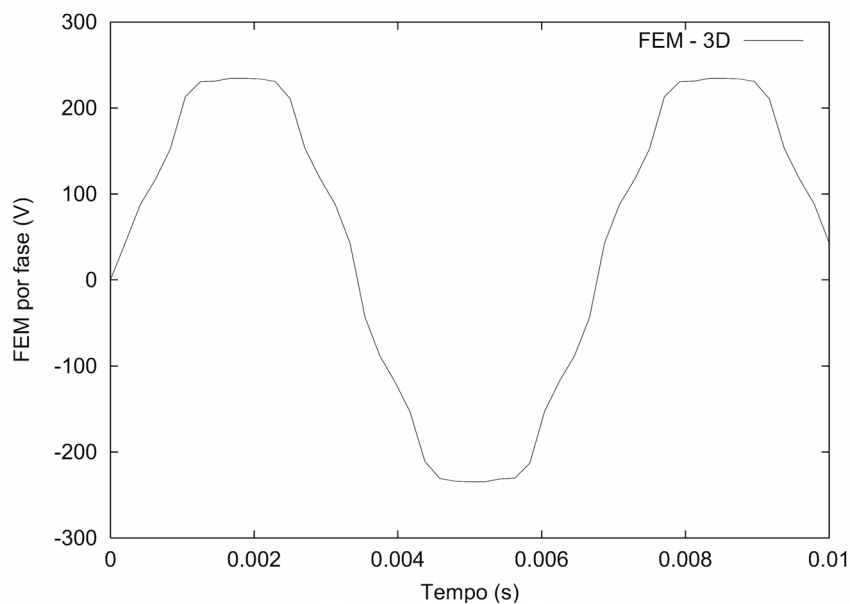


Figura 4.28 - FEM por fase – simulação.

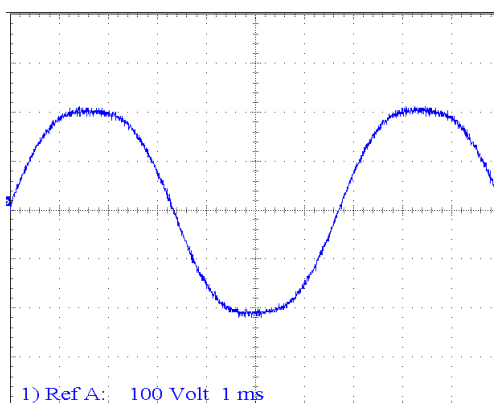


Fig. 4.29 - FEM em 200 rpm – resultado medido.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram apresentados resultados obtidos para diferentes estruturas de máquinas elétricas para a validação das ferramentas de simulação desenvolvidas. Na simulação destas diferentes máquinas a técnica da banda de movimento baseada nas condições de contorno tipo (anti) periódicas desenvolvida e implementada neste trabalho foi utilizada.

Os três tipos diferentes de máquinas a ímãs permanentes analisadas do ponto de vista de suas grandezas locais e globais mostram a versatilidade e o grau de precisão obtidos com os procedimentos informáticos desenvolvidos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

A modelagem em eletromagnetismo é baseada nas equações de Maxwell que constituem o modelo de partida. Utilizando as hipóteses de eletrotécnica, pode-se extrair dessas equações o modelo magnetodinâmico caracterizando a evolução no tempo do campo eletromagnético. O estudo em regime estático constitui então a magnetostática. Estudaram-se as formulações onde foram implementadas as condições de (anti) periodicidade e a técnica da banda de movimento, tanto em suas formas forte quanto em suas formas fraca. Essas formulações podem ser estudadas inserindo outras variáveis (ferramentas matemáticas), como por exemplo, os potenciais escalares e vetoriais. A noção de potencial é muito interessante, pois ela permite tornar implícita uma das equações a resolver. Assim, o campo físico é ligado ao potencial por uma operação de derivação ou integração. Entretanto, a utilização desses potenciais acarreta em certas dificuldades, como o problema das regiões não simplesmente conexas para o potencial escalar ou a definição de uma condição de calibre para o potencial vetor. Neste trabalho, resolveram-se os problemas das regiões multiplamente conexas usando-se cortes a fim de torná-las simplesmente conexas. Quanto ao problema de unicidade do potencial vetor, utilizou-se o calibre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$, cuja implementação consiste em anular a circulação de \mathbf{a} ao longo de uma árvore definida no domínio de estudo.

Mostrou-se que um tratamento adequado dos termos da integral de superfície nas formas fracas das formulações pode ser feito para definir quantidades globais de uma forma natural. Isso foi usado para a obtenção das equações de circuito elétrico tanto para os condutores maciços quanto para os condutores finos.

As condições de periodicidade e anti-periodicidade foram implementadas para as formulações conformes em \mathbf{b} e \mathbf{h} . Atenção especial foi dada quanto a consistência dessas condições com as condições de calibre e com os campos magnéticos.

Dentre os métodos para levar em conta o movimento descritos na literatura, optou-se pela técnica da banda de movimento, pois ela permite um deslocamento independente do passo de discretização e não gera incógnitas suplementares devido a alocação dinâmica das condições de periodicidade e anti-periodicidade. Além disso, é uma técnica possível de ser implementada em diferentes formulações matemáticas, como foi mostrado nos capítulos anteriores.

A validação das ferramentas desenvolvidas neste trabalho foi feita utilizando-se três tipos de topologias de máquinas elétricas. Essas topologias são chamadas de fluxo radial, axial e

transversal. Enquanto as duas primeiras, com algumas hipóteses simplificadoras, podem ser analisadas através do método de elementos finitos em 2D, a terceira topologia exige uma análise em 3D.

A dificuldade mais relevante neste trabalho foi sem dúvida a confecção da malha nas estruturas tridimensionais. O fato de haver necessidade de uma malha regular na região do entreferro, restringiu fortemente a realização da malha 3D. Este problema foi contornado usando-se o método da extrusão, onde a malha 3D é obtida diretamente da extrusão da malha em 2D.

Para o motor de fluxo radial apresentaram-se dois casos: o primeiro com a máquina funcionando como gerador a vazio, onde se pôde observar o efeito da deformação dos elementos situados na banda de movimento sobre a força eletromotriz. Esta deformação gera ruídos numéricos os quais foram atenuados usando-se elementos hierárquicos na banda de movimento. Foram usados hexaedros ou prismas na banda de movimento e prismas nas demais regiões. Analisou-se a conexão das partes fixa e móvel da máquina tanto na formulação conforme em ***b*** e ***h***. Este primeiro exemplo pôde validar as ferramentas computacionais implementadas neste trabalho através da comparação com o resultado experimental da força eletromotriz. No segundo caso, analisou-se a máquina funcionando como um gerador alimentando uma carga resistiva através de uma ponte completa de diodos. Este estudo permitiu validar os resultados obtidos com o acoplamento das equações de campo magnético com as do circuito externo. Aqui, pôde-se também verificar se o movimento foi adequadamente implementado quando o passo de tempo é variável a fim de levar em conta o efeito da comutação dos diodos, pois neste caso o rotor deve ser reposicionado. Os resultados de simulação foram comparados com os resultados obtidos experimentalmente.

Para o motor de fluxo axial realizou-se uma comparação entre resultados obtidos em 2D e 3D. Para os resultados em 2D usou-se uma simplificação no modelo tridimensional do motor e o movimento foi levado em conta considerando um movimento de translação. No modelo em 3D, houve dificuldades para obtenção da malha tridimensional por extrusão, pois para um modelo um pouco mais complexo a extrusão não seria possível. Os resultados obtidos em 2D e 3D foram coerentes.

A terceira topologia analisada neste trabalho foi o motor de fluxo transversal. Neste exemplo, realizou-se uma análise magnetodinâmica na formulação ***a*** usando-se duas bandas de movimento. O resultado obtido pela simulação também foi comparado com o resultado experimental.

Desta maneira podemos concluir que o objetivo deste trabalho de contribuir ao desenvolvimento de ferramentas informáticas de análise de máquinas elétricas levando-se em conta o movimento e o acoplamento entre as equações de campo magnético e os circuitos de alimentação foi alcançado.

Obviamente o assunto não está esgotado e as sugestões de trabalhos futuros passariam primeiramente pela eliminação das principais restrições encontradas neste trabalho e que estão enumeradas abaixo:

- a) resolver o problema da derivada em função do tempo na região da banda de movimento para a formulação h .
- b) desenvolver um novo método para levar em conta o movimento sem restringir o tipo de malha no entreferro ou desenvolver malhadores tridimensionais que possam aceitar algumas restrições sem prejudicar a qualidade da malha.
- c) desenvolver métodos de resolução de sistemas matriciais mais rápidos para análise 3D com acoplamento de circuitos externos.
- d) investigar com mais detalhes os problemas de geração de ruídos numéricos com a deformação de elementos finitos (força eletromotriz, torques, etc ...).

ANEXO A – ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICOS

Duas técnicas podem ser aplicadas para melhorar a precisão da solução obtida por um método de aproximação por elementos finitos. A primeira dita método h , consiste em modificar o tamanho dos elementos geométricos discretizando o domínio de estudo. A segunda dita método p , consiste em modificar o grau dos espaços de aproximação.

A.1 INTERESSE DOS ELEMENTOS HIERÁRQUICOS

As técnicas de refinamento do tipo h são atualmente bem conhecidas. A estimação do erro permite adaptar de maneira automática, a partir de uma primeira solução inicial obtida com uma malha grossa, o tamanho dos diferentes elementos em função de um certo critério sobre o erro ou o número de elementos. No entanto, esta técnica necessita uma nova discretização parcial.

O interesse dos métodos p é de evitar esta nova discretização, o que se revela interessante nos problemas tridimensionais complexos, onde a malha da estrutura representa uma parte não desprezível do esforço necessário na resolução do problema.

A maioria dos métodos de refinamento p propostos na literatura se contenta geralmente em efetuar um aumento global (isto é, concernente a todos os elementos da malha) da ordem das funções de base dos espaços de aproximação. Os elementos hierárquicos permitem, considerando suas propriedades intrínsecas, de misturar de maneira natural os graus de aproximação da mesma malha, e então, de diminuir o erro de aproximação.

A fim de permitir uma fácil combinação de elementos de diferentes ordens na mesma malha, as seguintes condições devem ser satisfeitas [48]:

- a) nenhuma entidade numérica diferente dos nós, das arestas, das faces e do volume do elemento deve ser criada quando se aumenta a ordem de interpolação. Isto significa que nenhum tratamento geométrico especial para conectar dois elementos de diferentes ordens tem de ser efetuado;
- b) as bases dos espaços das funções locais devem ser hierárquicas, visto que a conexão dos dois elementos de ordens diferentes pode ser feita localmente fixando os valores de alguns graus de liberdade em zero.

A.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADE DOS ELEMENTOS HIERÁRQUICOS

A.2.1 Definição

Os elementos finitos são ditos hierárquicos se as funções de base de um elemento são um sub-conjunto das funções de base de todo elemento de ordem superior [98].

Os elementos finitos nodais do tipo Lagrange, por exemplo, não possuem essa propriedade, pois o conjunto das funções de forma é inteiramente renovado quando a ordem de interpolação passa do grau $p-1$ ao grau p .

A.2.2 Propriedades

As funções de base do sub-espço vetorial P do espaço das funções escalares ou vetoriais são, por definição, linearmente independentes. Assim, os diferentes elementos finitos serão construídos respeitando o princípio de bases completas.

Esse princípio implica na seguinte propriedade: se P_{p-1} e P_p são os espaços de aproximação de dois elementos finitos $(K_{p-1}, \Sigma_{p-1}, P_{p-1})$ e (K_p, Σ_p, P_p) , respectivamente de graus $p-1$ e p , e se as funções de base do elemento (K_p, Σ_p, P_p) são obtidas completando as funções de base do elemento $(K_{p-1}, \Sigma_{p-1}, P_{p-1})$, os graus de liberdade σ_i que se acrescenta à Σ_{p-1} para formar Σ_p devem ser tais que:

$$\sigma_i(p) = 0, \quad \forall p \in P_{p-1}. \quad (\text{A.1})$$

Aumentar a ordem dos elementos em uma malha dada significa adicionar, para os graus de liberdade já presentes, outro conjunto de graus de liberdade.

O método para conectar dois elementos adjacentes de ordens diferentes pode ser resumido como segue [48]: anula-se o valor de todos os graus de liberdade que são comuns aos dois elementos e que estão associados com as funções de base cuja ordem é maior do que o elemento de ordem mais baixa.

Maiores detalhes sobre o método de conexão podem ser obtidos em [48]. A construção das bases hierárquicas pode ser estudada em [48] [98].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Trowbridge C.W., "Past and future perspectives for computational electromagnetics in academia, industry and the market place", *Anais do CBMAG*, pp. 1-6, Ouro Preto, novembro, 1996.
- [2] Bossavit A., "A rationale for "edge-elements" in 3D fields computations", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no.1, pp. 74-79, 1988.
- [3] Bossavit A., "Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism", *IEE Proceedings*, vol. 135, Pt. A, no. 3, pp. 179-187, 1988.
- [4] Ida N., and Bastos J.P.A., "Electromagnetics and calculations of fields", *Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] Mur G., "Edge elements, their advantages and their disadvantages", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3552-3557, september 1994.
- [6] Mur G., "The fallacy of edge elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3244-3247, september 1998.
- [7] Takahashi N., Nakata T., Fujiwara K., and Imai T., "Investigation of effectiveness of edge elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1619-1622, march 1992.
- [8] Wu J.Y., and Lee R., "The advantages of triangular and tetrahedral edge element for electromagnetic modeling with the finite element method", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 9, pp. 1431-1437, september 1997.
- [9] Pinho A.C., "Simulação de dispositivos eletromagnéticos pela resolução simultânea das equações de campo eletromagnético em 3D com as equações dos circuitos de alimentação", Tese de Doutorado, UFSC, novembro 1998.
- [10] Pinho A.C., Sadowski N., Kuo-Peng P., Bastos J.P.A., and Batistela N.J., "A general method for coupling electronic circuits with 3D electromagnetic fields", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3166-3169, september 1998.
- [11] Sadowski N., Bastos J.P.A., Albuquerque A.B., Pinho A.C., and Kuo-Peng P., "A voltage fed AC contactor modeling using 3D edge elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3170-3173, september 1998.
- [12] Santos J.A.A., "Desenvolvimento de um sistema de cálculo 3D por elementos de aresta tetraédricos e aplicação a uma máquina síncrona com polos do tipo "garra"", Tese de Doutorado, UFSC, fevereiro 1999.
- [13] Santos J.A.A., Bastos J.P.A. and Sadowski N., "Using Laplace's equation for defining magnetizing current densities for 3D analysis with edge elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol.35, no. 3, pp. 1179-1182, may 1999.

- [14] Bíró O., Preis K., and Richter K.R., "On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 651-654, may 1996.
- [15] Bouissou S., and Piriou F., "Study of 3D formulations to model electromagnetic devices", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3228-3231, september 1994.
- [16] Coulomb J.L., "Finite element three dimensional magnetic field computation", *IEEE Trans. Magn.*, vol. mag-17, no. 6, pp. 3241- 3246, november 1981.
- [17] Preis K., Bardi I., Biro O., Magele C., Vrisk G., and Richter K.R., "Different finite element formulations of 3D magnetostatic fields", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1056-1059, march 1992.
- [18] Ren Z., and Razek A., "Comparison of some 3D eddy current formulations in dual systems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 751-755, july 2000.
- [19] Albanese R., and Rubinacci G., "Magnetostatic field computation in terms of two-component vector potentials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [20] Golias N.A., and Tsiboukis T.D., "Magnetostatics with edge elements: a numerical investigation in the choice of the tree", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 2877-2880, september 1994.
- [21] Kettunem L., Forsman K., and Bossavit A., "Gauging in whitney spaces", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 3, pp. 1466-1469, may 1999.
- [22] Mesquita R.C., "Additional properties of the incomplete gauge formulation for 3-D nodal finite element magnetostatic", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 2861-2864, september 1994.
- [23] Vérité J.C., "Calculation of multivalued potentials in exterior regions", *IEEE Trans. Magn.*, vol. mag-23, no. 3, may 1987.
- [24] Bouillault F., and Razek A., "Prise en compte du mouvement dans la détermination numérique des courants de Foucault dans une structure électromagnétique", *Revue de physique appliquée*, vol. 25, pp. 649-659, 1983.
- [25] Razek A., Coulomb J.L., Feliachi M., and Sabonnadiere J.C., "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", *IEEE Trans. Magn.*, vol. mag-18, no. 2, pp. 655-659, march 1982.
- [26] Allen N., Lai H.C., Leonard P.J., and Rodger D., "External circuit, movement, and periodicity considerations in the design of electrical machines using finite elements", *IEE Electrical Machines and Drives*, no. 412, pp. 126-130, september 1995.

- [27] Golovanov C., Coulomb J.L., Maréchal Y., and Meunier G., "3D mesh connection techniques applied to movement simulation", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3359-3362, september 1998.
- [28] Lai H.C., Leonard P.J., Rodger D., and Allen N., "3D finite element dynamic simulation of electrical machines coupled to external circuits", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 2, pp. 2010-2013, march 1997.
- [29] Lai H.C., Rodger D., and Leonard P.J., "Coupling meshes in 3D problems involving movements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1732-1734, march 1992.
- [30] Marechal Y., Meunier G., Coulomb J.L., and Magnin H., "A general purpose tool for restoring inter-element continuity", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, march 1992.
- [31] Rodger D., Lai H.C., and Leonard P.J., "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, no. 2, pp. 548-550, march 1990.
- [32] Dreher T., Perrin-Bit R., Meunier G., and Coulomb J.L., "A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1070-1073, may 1996.
- [33] Perrin-Bit R., "Modélisation des machines électriques tournantes par le méthode des éléments finis tridimensionnels: calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, septembre 1994.
- [34] Perrin-Bit R., and Coulomb J.L., "A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1920-1923, may 1995.
- [35] Boualem B., "Contribution à la modélisation de systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels: application à la machine asynchrone", *Thèse de doctorat*, Université des Sciences et Technologies de Lille (USTL), França, 1997.
- [36] Boualem B., and Piriou F., "Hybrid formulation $\mathbf{a}-\Omega$ with finite element method to model in 3D electromagnetic systems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 659-662, may 1996.
- [37] Boualem B., and Piriou F., "Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement: application à la machine asynchrone", *NUMELEC*, pp. 108-109, mars 1997.
- [38] Boualem B., and Piriou F., "Numerical models for rotor cage induction machines using finite element method", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3202-3205, september 1998.
- [39] Davat B., Ren Z., and Lajoie-Mazenc M., "The movement in field modeling", *IEEE Trans. Magn.*, vol. mag-21, no. 6, pp. 2296-2298, november 1985.
- [40] Demenko A., "3D edge element analysis of permanent magnet motor dynamics", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3620-3623, September 1998.

- [41] Demenko A., "Movement simulation in finite element analysis of electrical machine dynamics", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1553-1556, may 1996.
- [42] Sadowski N., "Modélisation des machines électriques à partir de la résolution des equations du champ en tenant compte du mouvement et du circuit d'alimentation (Logiciel EFCAD)", *Thèse de Docteur de l'INPT*, Toulouse, França, 1993.
- [43] Sadowski N., Lefèvre Y., Lajoie-Mazenc M., and Cros J., "Finite element torque calculation in electrical machines while considering the mouvement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1410-1413, march 1992.
- [44] Kuo-Peng P., Sadowski N., Bastos J.P.A., Carlson R. and Batistela N.J., "A general method for coupling static converters with electromagnetic structures", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 33, no 2, pp 2004 – 2009, march 1997.
- [45] Mesquita R.C., "Cálculo de campos eletromagnéticos tridimensionais utilizando elementos finitos: magnetostática, quase-estática e aquecimento indutivo", Tese de Doutorado, UFSC, outubro de 1990.
- [46] Dular P., "Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires", *Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique*, 1994.
- [47] Kotiuga, P.R., "An algorithm to make cuts for magnetic scalar potentials in tetrahedral meshes based on the finite element method", *IEEE Trans. on Magn.*, no. 5, pp. 4129-4131, 1989.
- [48] Geuzaine, C., "High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account", Tese de Doutorado, Université de Liège, outubro de 2001, Bélgica.
- [49] Hsu H.P., "Análise Vetorial", *Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro*, 1972.
- [50] Dular P., Henrotte F., Genon A., and Legros W., "A generalized source magnetic field calculation method for inductors of any shape", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 2, pp. 1398-1401, march 1997.
- [51] Le Menach Y., Clénet S., and Piriou F., "Numerical model to discretize source fields in the 3D finite element method", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 676-679, july 2000.
- [52] Dular P., Nicolet A., Genon A., and Legros W., "A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1356-1359, may 1995.
- [53] Dular P., Nicolet A., Genon A., and Legros W., "Mixed finite elements associated with a collection of tetraedra, hexaedra and prisms", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 2980-2983, septembre 1994.

- [54] Ahagon A., and Fujiwara K., "Some important properties of edge shape functions", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3311-3314, september 1998.
- [55] Ahagon A., Fujiwara K., and Nakata T., "Comparison of various kinds of edge elements for electromagnetic field analysis", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 898-901, may 1996.
- [56] Bossavit A., "Mixed finite elements and the complex of Whitney forms", *The mathematics of finite elements and applications VI*, Academic Press, London, pp. 137-144, 1988.
- [57] Dular P., Geuzaine G., and Legros W., "A natural method for coupling magnetodynamic \mathbf{h} -formulations and circuit equations", *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 35, no. 3, pp. 1626-1629, may 1999.
- [58] Dular P., Henrotte F., Meys B., Genon A., and Legros W., "Une méthode naturelle de traitement des potentiels flottants associée à la méthode des éléments finis", *J. Phys. III France*, vol. 7, no. 11, pp. 2201-2209, 1997.
- [59] Dular P., Legros W., and Nicolet A., "Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3078-3081, septembre 1998.
- [60] Dular P., Legros W., Gersem H.D., and Hameyer K., "Floating potentials in various electromagnetic problems using the finite element method", *4th International Workshop on Electric and Magnetic Fields*, pp. 409-414, 1998.
- [61] Dular P., Henrotte F., and Legros W., "A general and natural method to define circuit relations associated with magnetic vector potential formulations", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 3, pp. 1630-1633, may 1999.
- [62] Dular P., Kuo-Peng P., Geuzaine C., Sadowski N., and Bastos J.P.A., "Dual magnetodynamic formulations and their source fields associated with massive and stranded inductors", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1293-1299, july 2000.
- [63] Dular P., Sadowski N., Bastos J.P.A., and Legros W., "Dual complete procedures to take stranded inductors into account in magnetic vector potential formulations", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1600-1605, july 2000.
- [64] Biddlecombe C.S., Simkin J., Jay A.P., Sykulski J.K., and Lepaul S., "Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, september 1998.
- [65] Bouissou S., Piriou F., Kieny C., and Tanneau G., "Numerical simulation of a power transformer using 3D finite element method coupled to circuit equation", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3224-3227, september 1994.
- [66] Dreher T., and Meunier G., "3D line current model of coils and external circuits", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1853-1856, may 1995.

- [67] Golovanov C., Marechal Y., and Meunier G., “3D edge element based formulation coupled to electric circuits”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3162-3165, septembre 1998.
- [68] Leonard P.J., Lai H.C., and Hill-Cottingham R.J., “Treatment of symmetry in three dimensional finite element models of machines coupled to external circuits”, *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 14, no. 4, pp. 1276-1281, december 1999.
- [69] Piriou F., and Razek A., “Finite element analysis in electromagnetic systems accounting for electric circuits”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1669-1675, 1993.
- [70] Wang J.S., “A nodal analysis approach for 2D and 3D magnetic circuit coupled problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1074-1077, may 1996.
- [71] Ortiz, J. L. R., “Método de elementos finitos na simulação de dispositivos eletromagnéticos acoplados a conversores estáticos com laço de controle”, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis 2002.
- [72] Antunes, R., “Modelagem pelo método de elementos finitos de servomotor CC sem escovas e seu acionamento”, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis 2002.
- [73] Oliveira, A. M., “Análise de dispositivos eletromagnéticos trifásicos modelados por elementos finitos 2D conectados aos seus circuitos externos de alimentação”, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis 2000.
- [74] Dular P., Ferreira da Luz M.V., Geuzaine C., Sadowski N., and Bastos J.P.A., “Connection boundary conditions associated with different types of mixed finite elements with dual formulations”, *Proceedings of the 5th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF)*, Belgium, paper number 29, 2000.
- [75] Dular P., Ferreira da Luz M.V., Geuzaine C., Sadowski N., and Bastos J.P.A., “Connection boundary conditions with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band”, *The 9th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Wisconsin, USA, junho, pp. 4-7, 2000.
- [76] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., and Ahagon A., “Periodic boundary condition for 3-D magnetic field analysis and its applications to electrical machines”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 6, pp. 2694-2696, november 1998.
- [77] Olszewski P., “Expansion of periodic boundary condition for 3-D FEM analysis using edge elements”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1084-1087, march 1992.
- [78] P. Dular, M.V. Ferreira da Luz, C. Geuzaine, N. Sadowski, J.P.A.Bastos, “Connection boundary conditions with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band”, *COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 20, N. 1, 2001, pp. 109-119 (Inglaterra).

- [79] Emson C.R.I., Riley C.P., Walsh D.A., Ueda K., and Kumano T., "Modelling eddy currents by rotating systems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 2593-2596, september 1998.
- [80] Lepaul S., Sykulski J.K., Biddlecombe C.S., Jay A.P., and Simkin J., "Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 5, pp. 1602-1605, may 1999.
- [81] K. Muramatsu, T. Nakata, N. Takahashi, and K. Fujiwara, "Comparison of coordinate systems for eddy current analysis in moving conductors", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 28, No. 2, pp. 1186-1189, 1992.
- [82] Ratnajeevan S., and Hoole H., "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", *IEEE Trans. Magn.*, vol. mag-21, no. 6, pp. 2292-2295, november 1985.
- [83] Tani K., Yamada T., and Kawase Y., "A new technique for 3-D dynamic finite element analysis of electromagnetic problems with relative movement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3371-3374, september 1998.
- [84] Tsukerman A.I., "Overlapping finite elements for problems with movement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no.5, september 1992.
- [85] M.V. Ferreira da Luz, P. Dular, N. Sadowski, C. Geuzaine, J.P.A.Bastos, "Analysis of a permanent magnet generator with dual formulations using periodicity conditions and moving band", *COMPUMAG Evian 2001 Proceedings*, 02 a 05 de Julho de 2001, Evian (França), Vol. III, pp. III-96 a III-97.
- [86] M.V. Ferreira da Luz, P. Dular, N. Sadowski, C. Geuzaine, J.P.A.Bastos, "Analysis of a permanent magnet generator with dual formulations using periodicity conditions and moving band", *IEEE Trans. on Magn.*, Vol. 38, No. 2, Março de 2002, pp. 961-964 (USA).
- [87] Dular, P. and Kuo-Peng, P., "An efficient time discretization procedure for finite element – electronic circuit equation coupling", *XVI Symposium Electromagnetic Phenomena Nonlinear Circuits*, pp. 15-18, Poland.
- [88] M. V. Ferreira da Luz, P. Dular, N. Sadowski, J. Gyselinck, C. Geuzaine, J.P.A.Bastos, "3D Finite element analysis of axial flux permanent magnet motors", *The 10th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering*, setembro de 2002, Graz (Áustria), pp.130; versão extendida pp.516-520.
- [89] R. Fichieux, F. Caricchi, F. Crescimbeni, and O. Honorati, "Axial-flux permanent-magnet motor for direct-drive elevator systems without machine room", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 37, No. 6, pp. 1693-1707, 2001.
- [90] R. Wallace, L. Moran, G. Cea, and F. Perez, "Design and construction of medium power axial flux induction motors", *Conf. Rec. Electrical Machines and Drives*, pp. 260-265, 1991.

- [91] Y.L. Zhang, S.L. Ho, H.C. Hong, and G.D. Xie, "Analytical prediction of armature-reaction field in disc-type permanent magnet generators", *IEEE Trans. on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 4, pp. 1385-1390, 1999.
- [92] E.P. Furlani, "A method for predicting the field in permanent-magnet axial-field motors", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 28, No. 5, pp. 2061-2066, 1992.
- [93] Zhang, Z., Profumo F., Tenconi, A., and Santamaria, M., " Analysis and experimental validation of performance for an axial flux permanent magnet brushless DC motor with powder iron metallurgy cores", *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 33, n. 5, pp. 4194-4196, setembro 1997.
- [94] Weh, H., Hoffmann H., and Landrath J., "New permanent excited synchronous machine with high efficiency at low speed", *Proc. Int. Conference on Electrical Machines (ICEM)*, vol. 3, pp. 35-40, 1988.
- [95] Bork M., Blissenbach R., and Hennenberg G., "Identification of the loss distribution in a transverse flux machine", *Proc. Int. Conference on Electrical Machines (ICEM)*, vol. 3, pp. 1826-1831, 1998.
- [96] M. V. Ferreira da Luz, P. Dular, N. Sadowski, J.P.A. Bastos, "Análise magnetodinâmica de um motor com fluxo magnético transversal", *Anais da Conferência CBMAG 2002 – V Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, novembro de 2002, Gramado (RS) (em CD-ROM).
- [97] E.R. de Andrade, J.A. Silva, W. Sheibig, "Análise eletromagnética de um motor com fluxo magnético transversal", *III Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, 1998.
- [98] Carey, G. F. and Oden, J. T., "Finite Elements. A Second Course", Volume II, Prentice-Hall, Inc., 1983.